

Planification et exploitation des essais par la méthode Caboum

André Cabarbaye, Roland Lauheret
Centre National d'Etudes Spatiales (CNES)

18 avenue Edouard Belin

31401 Toulouse Cedex 4

andre.cabarbaye@cnes.fr, roland.lauheret@cnes.fr

André Cabarbaye
CAB INNOVATION
3, rue de la Coquille

31500 Toulouse

andre.cabarbaye@cabinnovation.com

Résumé — Cette communication présente une méthode originale de planification et d'exploitation d'essais fondée sur la D-optimalité et une technique bayésienne mettant en œuvre deux boucles d'optimisation imbriquées. Elle peut s'appliquer à la plupart des plans d'expériences, dont les essais de fiabilité, pour caractériser les courbes de réponse. Initialement développée pour tester la fiabilité d'éléments pyrotechniques, elle est désignée sous le nom de méthode Caboum et est supportée par le logiciel d'optimisation Gencab.

Abstract - This paper presents an original method for planning and operating tests based on D-optimality and a Bayesian technique using two nested optimization loops. It can be applied to most experimental designs, including reliability tests, to characterize response curves. Initially developed to test the reliability of pyrotechnic elements, it is referred to as the Caboum method and is supported by the Gencab optimization software.

Mots clés : Plan d'expériences, Optimal design, D-optimalité, Bayésien, Essais accélérés, Fiabilité, Essais.

I. INTRODUCTION

La planification optimale des plans d'expériences (optimal designs) consiste à élaborer des plans expérimentaux qui sont optimaux par rapport à un critère statistique [1] [2]. Le critère le plus employé est la D-optimalité qui consiste à maximiser le déterminant de la matrice de Fisher (inverse de la matrice de variance covariance) afin de minimiser la variance des estimateurs et d'augmenter ainsi la précision des résultats obtenus à l'issue d'une campagne d'expérimentation. Outre le gain en précision apporté aux courbes de réponse, cette planification optimale des essais est susceptible d'en diminuer le coût, car toute autre approche nécessite un plus grand nombre d'essais pour estimer les paramètres du modèle avec la même précision.

Par ailleurs, l'ajustement d'une courbe de réponse par la méthode du maximum de vraisemblance (ou par celle des moindres carrés) ne peut être réalisé qu'à partir d'un certain nombre d'essais qui satisfont certaines conditions propres au modèle considéré. Ce nombre est au moins égal au nombre de paramètres du modèle et est parfois très supérieur à celui-ci. Mais si une connaissance a priori des paramètres du modèle existe (jugement d'expert), ces premiers essais peuvent être

remplacés par des essais virtuels, par application d'une méthode bayésienne.

L'emploi de la D-optimalité associé à une technique bayésienne, consistant à remplacer la connaissance a priori en essais fictifs au moyen de boucles d'optimisation imbriquées, constitue une méthode de planification et d'exploitation d'essais que nous avons nommé la « méthode Caboum ». Initialement développée pour optimiser les essais de systèmes mono-coup, dans le domaine de la pyrotechnie, elle peut être généralisée à la plupart des plans d'expériences, dont les essais de fiabilité notamment.

II. EXPLOITATION ET PLANIFICATION DES ESSAIS

L'estimation des paramètres ($\theta_1, \theta_2 \dots$) d'un modèle statistique (fiabilité, dégradation, etc.) s'effectue généralement par la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à maximiser la vraisemblance (probabilité ou densité de probabilité d'obtenir des données observées ou les résultats des essais réalisés) pouvant être donnée par le modèle. Dans le cas d'un modèle déterministe, cette estimation peut résulter de la méthode des moindres carrés ou du maximum de vraisemblance en considérant un bruit gaussien comme erreur de mesure.

Durant une campagne d'expérimentation, la planification des essais est séquentielle si l'on ne cherche qu'à déterminer les conditions de l'essai suivant ou par lot si les conditions de plusieurs essais sont définies simultanément. Ces conditions d'essais constituent autant d'inconnues (covariables) à déterminer en maximisant le déterminant de la matrice de Fisher dans le cas de la D-optimalité. Les conditions d'essais ainsi obtenues cherchent à conforter l'estimation courante établie à partir des essais déjà réalisés, qu'ils soient réels ou virtuels.

A partir de l'expression de la vraisemblance, la matrice de Fisher peut se calculer par double dérivation du logarithme de la vraisemblance puis calcul de l'espérance {1}.

$$F = \begin{pmatrix} I_{00} & I_{01} \\ I_{10} & I_{11} \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} \quad \{1\}$$

Les termes de la matrice et son déterminant sont alors calculés à partir des résultats d'essais déjà réalisés et des conditions d'essais à planifier qui constituent autant d'inconnues à estimer.

III. METHODE CABOUM

Le principe de cette méthode est synthétisé en figure 1. Celle-ci consiste tout d'abord à transformer une connaissance a priori sur les paramètres recherchés en un minimum d'essais virtuels (conditions et résultats), au moyen de deux boucles d'optimisation imbriquées. La première estime les paramètres recherchés à partir de résultats d'essais virtuels par la méthode du maximum de vraisemblance sous le contrôle de la seconde

qui veille à ce que la configuration d'essais conduite à une estimation conforme à la connaissance a priori, tout en satisfaisant d'éventuelles contraintes propres à l'estimation.

Les conditions d'un certain nombre d'essais supplémentaires sont alors définies par la méthode D-optimale, puis l'ensemble des résultats obtenus, réels et virtuels, sont utilisés pour réaliser une nouvelle estimation. Cette dernière permet d'actualiser les essais virtuels afin de diminuer le poids de l'a priori initial.

Ce processus est réitéré un certain nombre de fois jusqu'à aboutir à l'estimation finale portant sur l'ensemble des essais réalisés, en supprimant éventuellement les essais virtuels si les contraintes propres à l'estimation restent satisfaites.

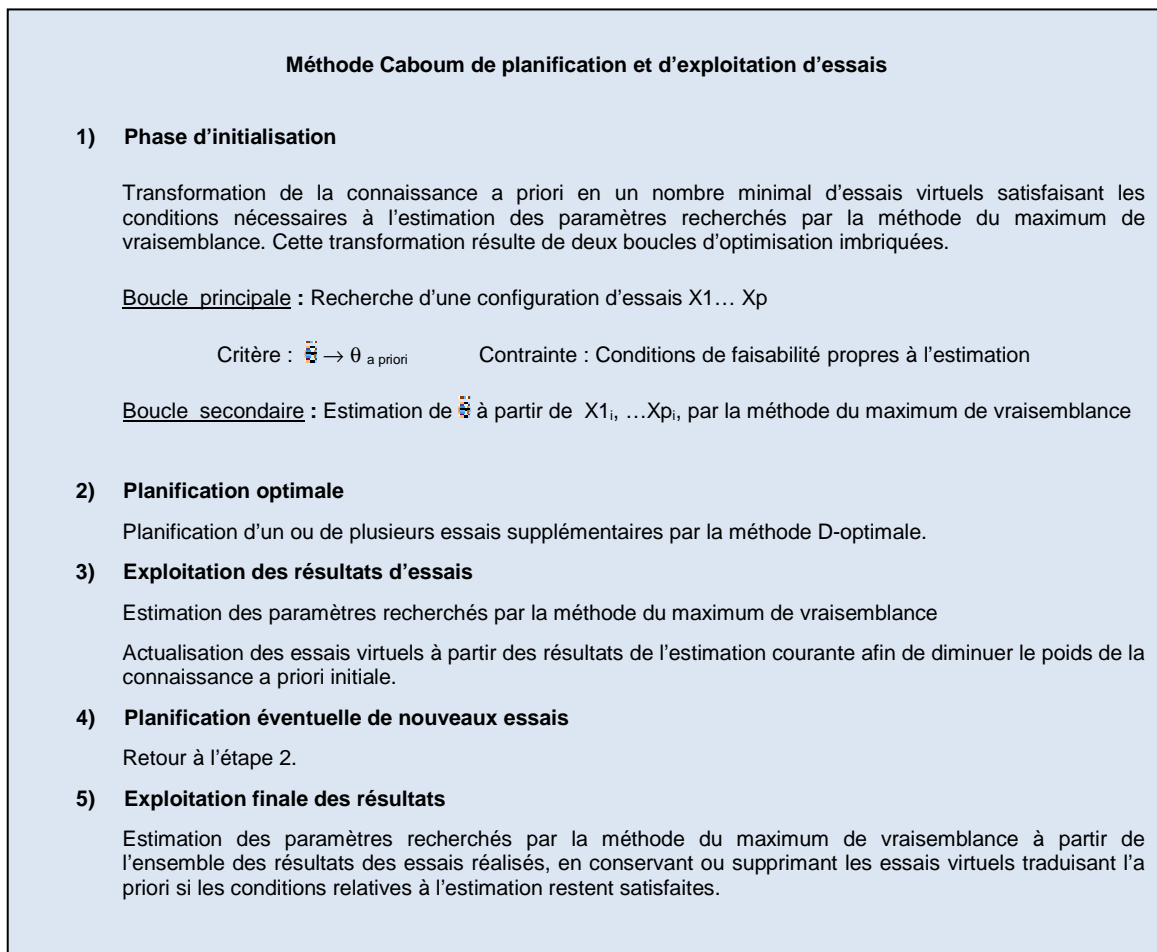


Figure 1. Principe de la méthode Caboum

IV. MODELES LINEAIRES

Le modèle linéaire de la forme $Y = X\beta + \epsilon$ avec Y la matrice des réponses, X la matrice des facteurs, β la matrice des paramètres à estimer et ϵ une matrice d'erreur ou de bruit, constitue un cas particulier de courbe de réponse. Son estimation, de type moindres carrés, peut s'effectuer de

manière analytique par résolution du système d'équations linéaires $\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$. La matrice de variance-covariance des paramètres (inverse de la matrice de Fisher) est alors égale à $\sigma^2 (X^T X)^{-1}$ avec σ l'écart type du bruit de mesure. Cette matrice est indépendante des réponses, de même que la planification des essais par la méthode D-optimale. Toutefois, la méthode Caboum peut être utilisée pour combiner une

connaissance a priori avec des résultats d'essais, notamment avant que ces derniers soient en nombre suffisant pour pouvoir estimer la courbe de réponse. Ainsi, l'exemple de la figure 2 porte sur le modèle polynomial {2}.

$$Y = P_0 + P_1 X_1 + P_2 X_2 + P_3 X_1^2 + P_4 X_2^2 + P_5 X_1 X_2 \quad \{2\}$$

Ce modèle linéaire à 6 paramètres nécessite au moins 6 résultats d'essais pour pouvoir être résolu. La méthode D-optimale a d'abord été utilisée pour définir les conditions

optimales des 6 premiers essais (valeurs correspondantes de X_1 et de X_2). Une connaissance a priori des paramètres du modèle ($P_{a\ priori}$) a ensuite été traduite en 6 résultats d'essais fictifs par deux boucles d'optimisation (moindres carrés). La méthode D-optimale a été à nouveau utilisée pour définir les conditions de deux essais supplémentaires qui ont fait l'objet de tests réels. L'ensemble des résultats fictifs et réels a alors été utilisé pour estimer les paramètres du modèle ainsi que la valeur minimale de la courbe de réponse, avec les intervalles de confiance correspondant à 60%.

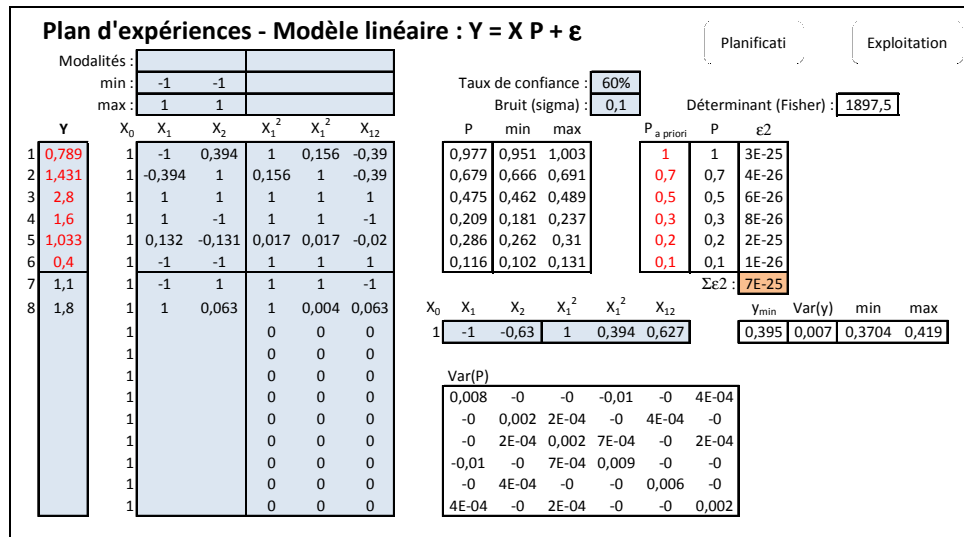


Figure 2. Traitement d'un modèle linéaire

V. MODELES NON LINEAIRES

Dans le cas non linéaire, la matrice de Fisher n'est plus indépendante des résultats d'essais qui interviennent dans le calcul de l'espérance {1}. Deux exemples issus du domaine de la fiabilité sont décrits ci-après.

1 Essais de systèmes mono-coup

Le fonctionnement des systèmes mono-coup (one shot) est limité à une seule utilisation et dépend d'un paramètre fonctionnel, tel que la masse de poudre d'une cisaille pyrotechnique ou le courant d'activation de son initiateur. Des essais sont mis œuvre pour estimer la probabilité de succès ou d'échec de tels systèmes employés notamment sur les systèmes spatiaux. La loi de fiabilité recherchée est une loi normale ou log normale en fonction de la valeur du paramètre fonctionnel (figure 3).

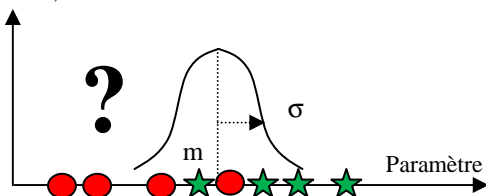


Figure 3. Densité de probabilité de fonctionnement

Les paramètres m et σ de cette loi peuvent être estimés en maximisant la vraisemblance d'une séquence de N essais réalisés dont l'expression {3} correspond à une loi binomiale dont la probabilité est la fonction de répartition de la loi normale.

$$L(m, \sigma) = \prod_{i=1}^N F(X_i)^{Y_i} (1 - F(X_i))^{1 - Y_i} \quad \{3\}$$

La vraisemblance est alors égale au produit des probabilités des résultats des essais réalisés, avec $Y_i = 1$ si l'essai est un succès et $Y_i = 0$ si l'essai est un échec, et la fonction de répartition de la loi normale a pour expression la formule {4}.

$$F(X_i) = \int_{-\infty}^{X_i} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{[(X - m)/\sigma]^2}{2}\right) du \quad \{4\}$$

Cet ajustement ne peut être mis en œuvre qu'en cas de recouvrement entre échecs et succès (overlap). En effet, l'écart-type σ converge vers zéro tant qu'un échec n'a pas été obtenu pour une valeur du paramètre fonctionnel supérieure à celle ayant préalablement conduit à un succès, ou inversement. La méthode Caboum permet cependant de s'affranchir de cette contrainte qui induit une phase d'initialisation relativement longue (une dizaine d'essais en moyenne). Une connaissance a

priori est alors transformée en trois essais virtuels satisfaisant la condition de recouvrement (échec max > succès min) au moyen de deux boucles d'optimisation imbriquées. Ainsi dans l'exemple de la figure 4, la connaissance a priori de $m = 4$ et

$\sigma = 2$ est remplacée par les 3 premières valeurs d'essais virtuels pour lesquels l'estimation par le maximum de vraisemblance donne 4,03039 pour la moyenne et 2,049 pour l'écart-type.

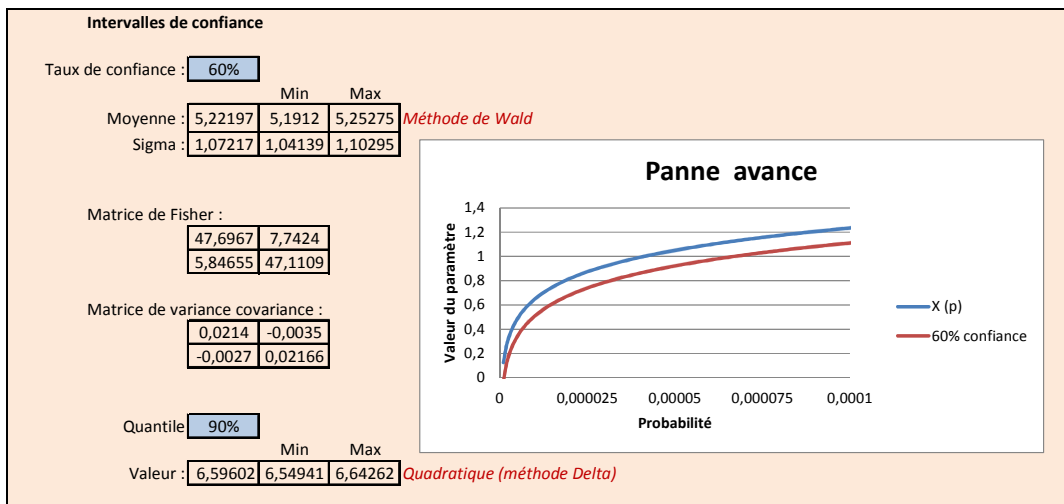
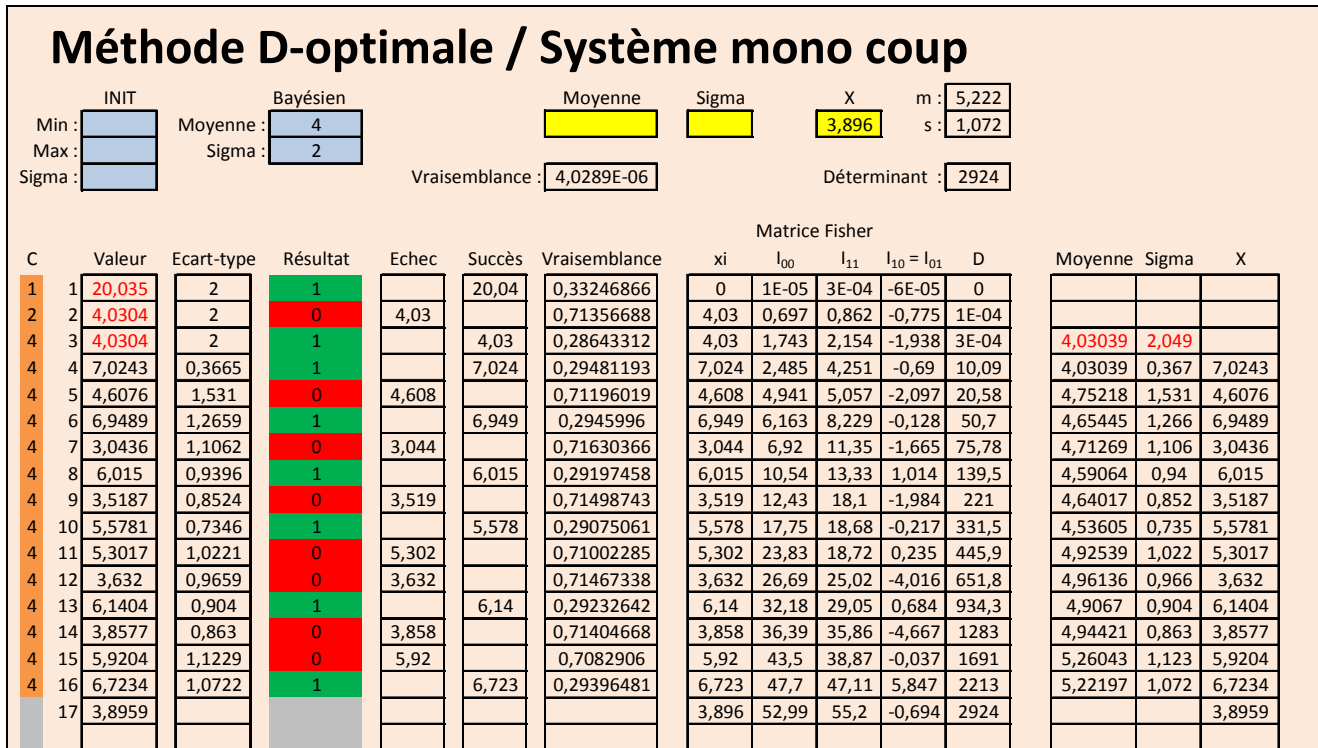


Figure 4. Séquence d'essais d'un système mono-coup

Les essais suivants sont alors menés de manière séquentielle en définissant la condition de chacun (valeur du paramètre fonctionnel) par la méthode D-optimale. A partir de l'expression de la vraisemblance {3}, la matrice de Fisher peut se calculer au moyen de la formule {1} par double dérivation du logarithme de la vraisemblance puis calcul de l'espérance {5}.

$$I_{00} = \sum_i \frac{f(x_i)^2}{F(x_i)(1-F(x_i))} \quad I_{11} = \sum_i \frac{f(x_i)^2 \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2}{F(x_i)(1-F(x_i))}$$

$$I_{10} = I_{01} = \sum_i \frac{f(x_i)^2 \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)}{F(x_i)(1-F(x_i))} \quad \{5\}$$

Les termes de la matrice et son déterminant sont alors calculés à partir des valeurs d'essais x_i déjà réalisés (virtuels ou réels) et de celle de l'essai à planifier qui constitue l'inconnue à estimer en maximisant le déterminant de la matrice de Fisher. Afin de pallier une connaissance a priori éventuellement médiocre, il est préférable de réactualiser la valeur des trois essais fictifs après chaque nouvel essai à partir de l'estimation courante des paramètres, et réduire ainsi progressivement le poids de l'a priori. Les essais virtuels peuvent être éventuellement supprimés dès que les essais réels satisfont la condition de recouvrement.

À l'issue d'une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance, il est possible de calculer des intervalles de confiance asymptotiques par la méthode de Wald [5] pour les différents paramètres, ou par la méthode delta pour des fonctions de ces paramètres tels que des quantiles. Le risque de fonctionnement intempestif (panne avance) ou de non fonctionnement du système mono-coup peut être ainsi estimé, avec un niveau de confiance, en fonction de la valeur du paramètre fonctionnel (figure 4).

2 Essais de fiabilité accélérés en vibration et température

Le modèle de fiabilité considéré est une loi de Weibull à 2 paramètres (β, σ) couplée à une loi d'Arrhenius {6} pour la température et un modèle de Basquin {7} pour le niveau vibratoire. Le facteur d'accélération globale AF est le produit des 2 facteurs AF_A et AF_B .

$$AF_A = \exp(Ea/K (1/(273+T_{Ref}^{\circ}C) - 1/(273+T^{\circ}C))) \quad \{6\}$$

avec Ea l'énergie d'activation (inconnue) et K la constante de Boltzmann (8,6171 10⁻⁵ eV/°K).

$$F = I_n(\beta, \sigma, Ea, p) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta \partial \sigma} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta \partial Ea} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta \partial p} \\ \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma \partial \beta} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma \partial Ea} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma \partial p} \\ \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea \partial \beta} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea \partial \sigma} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea^2} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea \partial p} \\ \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p \partial \beta} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p \partial \sigma} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p \partial Ea} & \frac{\partial^2 L_n L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p^2} \end{pmatrix} \quad \{7\}$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta^2} = \frac{-n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^{\beta} \left[\ln \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right) \right]^2 - k \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^{\beta} \left(\ln \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right) \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^{\beta} \left(\beta \ln \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right) + 1 \right) + \frac{k}{\sigma} \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^{\beta} \left(1 + \beta \ln \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right) \right) = \frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma^2} = \frac{n\beta}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^{\beta} \left(\frac{\beta(\beta+1)}{\sigma^2} \right) - k \frac{\beta(\beta+1)}{\sigma^2} \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial p} = n \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^{\beta} \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) \left[\beta \ln \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right) + 1 \right] - k \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^{\beta} \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) \left[\beta \ln \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right) + 1 \right]$$

$$AF_B = (C_A / C_R)^p \quad \{7\}$$

avec C_A le niveau vibratoire, C_R un niveau de référence (CR) et p un paramètre inconnu.

L'estimation des paramètres de la loi de Weibull (β, σ) et des lois d'accélération (Ea, p) peut s'effectuer par la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à maximiser le produit (somme des logarithmes) des densités de probabilité des données non censurées et des fiabilités des données censurées à droite. Un nombre minimum de 6 essais est nécessaire pour estimer les 4 paramètres de ce modèle par la méthode du maximum de vraisemblance.

La densité de la loi de Weibull accélérée est donnée par l'expression {8}.

$$f_A(X_i; \beta, \sigma, p) = AF * f_R(AF * X_i; \beta, \sigma) \quad \{8\}$$

$$f(X_i; \beta, \sigma) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^{\beta-1} \exp \left(- \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^{\beta} \right)$$

Celle de la fiabilité est donnée par l'expression {9}.

$$F_A(X_i; \beta, \sigma, p) = F_R(AF * X_i; \beta, \sigma) \quad \{9\}$$

$$F(X_i; \beta, \sigma) = \exp \left(- \left(\frac{X_i}{\sigma} \right)^{\beta} \right)$$

La matrice de Fisher peut se calculer par double dérivation de la log vraisemblance puis calcul de l'espérance {7}. Cette matrice est symétrique.

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \beta^2 \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) + k \beta^2 \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) \frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial p^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \beta^2 \left(\ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) \right)^2 - k \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \beta^2 \left[\ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea^2} = - \frac{k \beta^2}{K^2} \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \left(\frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \frac{\beta^2}{K^2} \left(\frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea \partial \beta} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right) \left[n - k \beta \ln \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right) \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta - k \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n \beta \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \ln \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right) - \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea \partial \sigma} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right) \left[\frac{k \beta^2}{\sigma} \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta + \sum_{i=1}^n \frac{\beta^2}{\sigma} \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 L_n L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea \partial p} = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right) \left[-k \beta^2 \left(\frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) - \sum_{i=1}^n \beta^2 \left(\frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \ln \left(\frac{C_A}{C_R} \right) \right]$$

Dans l'exemple de la figure 5, une connaissance a priori sur la valeur des différents paramètres ($\beta_a = 2$, $\sigma_a = 1000$, $Ea_a = 0,3$ et $p_a = 1,3$) est transformée en 6 essais virtuels au moyen de deux boucles d'optimisation imbriquées. A partir de ces 6 essais, l'estimation par le maximum de vraisemblance donne des résultats très proches de l'a priori ($\beta = 1,999$, $\sigma = 9999$,

$Ea = 0,2901$ et $p = 1,293$). Les essais réels suivants sont séquentiels, tronqués à une durée maximale de $T = 500$ heures et leurs conditions en température et niveau vibratoire sont déterminées par la méthode D-optimale.

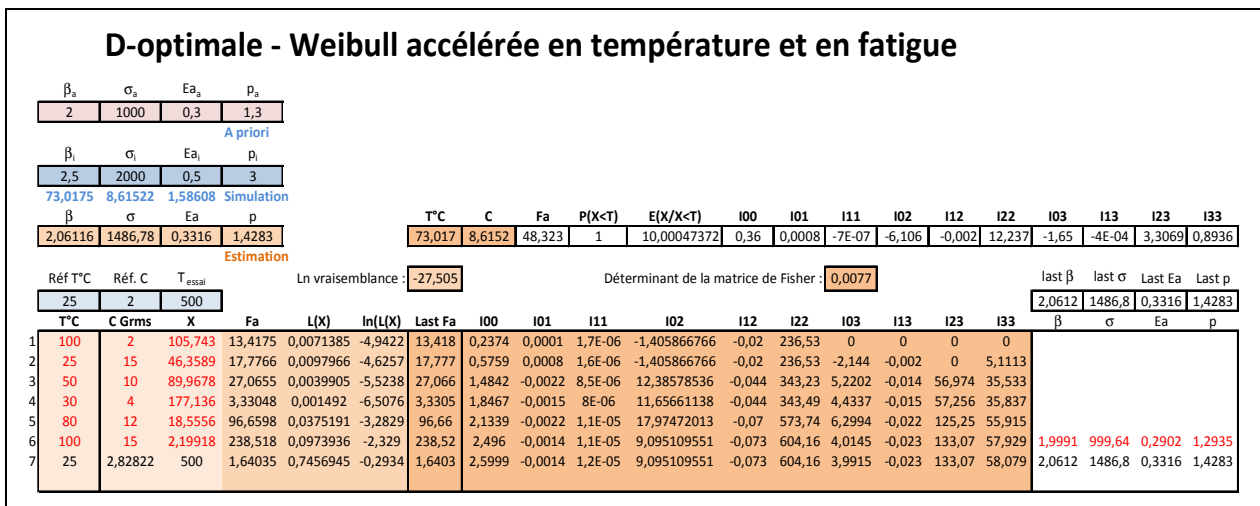


Figure 5. Séquence d'essais accélérés

Dans le calcul de la matrice de Fisher, la densité de probabilité et la fiabilité de l'essai suivant sont pondérées respectivement par la probabilité de défaillance avant et après T.

Dans le cas non censuré, l'espérance de la variable peut être calculée par intégration numérique ou à partir de la formule {8}.

$$E(X / X < T) = \int_0^T R(t) dt = \frac{1}{Fa} \int_0^T e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\beta} dt = \frac{1}{Fa} \frac{\sigma}{\beta} \gamma \left[\frac{1}{\beta}, \left(\frac{T}{\sigma}\right)^\beta \right] = \frac{1}{Fa} \frac{\sigma}{\beta} \Gamma \left(\frac{1}{\beta} \right) \int_0^{\left(\frac{T}{\sigma}\right)^\beta} f_\gamma \left(\frac{1}{\beta}, 1 \right) dt \quad \{8\}$$

VI. CONCLUSION

Fondée sur la méthode D-optimale et une technique bayésienne mettant en œuvre deux boucles d'optimisation imbriquées, la méthode Caboum de planification et d'exploitation d'essais est susceptible d'améliorer leurs résultats ou d'en diminuer le coût en réduisant leur nombre.

Elle peut être généralisée à la plupart des plans d'expériences et a déjà démontré son efficacité par simulation de campagnes d'essais de systèmes mono-coup [4]. Utilisée notamment pour des applications dans le domaine spatial, elle est supportée par le logiciel d'optimisation Gencab [6].

REFERENCES

[1] Smith, Kirstine (1918). "On the standard deviations of adjusted and interpolated values of an observed polynomial function and its constants and the guidance they give towards a proper choice of the distribution of observations". *Biometrika*

[2] Guttorp, P.; Lindgren, G. (2009). "Karl Pearson and the Scandinavian school of statistics". *International Statistical Review* 77: 64.

[4] C. Etcheverry, M. Pouligny, S. Bosse, A. Cabarbaye, Amélioration de la méthode Neyer d'estimation de fiabilité des systèmes mono coup utilisée en pyrotechnie, *Lambda mu* 20, 11-13/10/2016, Saint Malo.

[5] A. Cabarbaye, A. Tanguy, S. Bosse, Adjustment of complex probabilistic models and estimation of confidence intervals in a discrete manner, *PSAM11 & ESREL 2012*, 25 - 29 June 2012, Helsinki

[6] A. Cabarbaye. Outil générique d'optimisation dans le domaine discret et/ou continu éventuellement stochastique, *ROADEF'03 - Avignon*, 2003.