

# METHODE GENERALE DE PLANIFICATION OPTIMALE DES ESSAIS DE FIABILITE ET DE DEGRADATION

## GENERIC METHOD FOR OPTIMAL PLANNING OF RELIABILITY AND DEGRADATION TESTS

André Cabarbaye\*, Marie Pouligny, Christophe Etcheverry, Sébastien Bosse,

Centre National d'Etudes Spatiales (CNES)  
18, avenue Edouard Belin - 31401 Toulouse

\* CAB INNOVATION  
3, rue de la Coquille - 31500 Toulouse  
[www.cabinnovation.com](http://www.cabinnovation.com)

---

### Résumé

Cette communication présente une méthode originale de planification optimale et d'exploitation d'essais fondée sur la D-optimalité et sur une technique bayésienne mettant en œuvre des boucles d'optimisation imbriquées. Désignée sous le nom de méthode "Caboum" et supportée par l'outil Gencab, cette méthode a déjà démontré son efficacité pour les systèmes mono-coup (pyrotechnie) par simulation. Elle peut être généralisée à la plupart des plans d'expériences, dont les essais accélérés de fiabilité ou de dégradation, pour caractériser les courbes de réponse.

### Summary

This paper presents an original method of optimal planning and test operations based on D-optimality and Bayesian technics implementing optimization nested loops. Called "Caboum" and supported by Gencab software, this method has proven its effectiveness for single-shot systems (pyrotechnics) by simulation. It can be generalized to most of the design of experiments to characterise the response curves, including the accelerated reliability or degradation tests.

### Mots clés

Plan d'expériences, Essais, Optimal design, D-optimale, Essais accélérés, Fiabilité, Dégradation.

### Introduction

Dans les plans d'expériences (design of experiments) la planification optimale (optimal designs) consiste à élaborer des plans expérimentaux qui sont optimaux par rapport à un critère statistique. Ce domaine de la statistique a été créé par le statisticien danois Kirstine Smith [1] [2]. Parmi les critères statistiques envisagés [3], le plus employé est la D-optimalité qui consiste à maximiser le déterminant de la matrice de Fisher (inverse de la matrice de variance covariance) afin de minimiser la variance des estimateurs et d'augmenter ainsi la précision des résultats obtenus à l'issue d'une campagne d'expérimentation.

Dans le domaine de la Sécurité de Fonctionnement, cette planification optimale est susceptible d'améliorer les résultats d'essais de caractérisation de fiabilité ou de vieillissement ou d'en diminuer le coût, car toute autre approche nécessite un plus grand nombre d'essais pour estimer des paramètres avec la même précision.

Déjà mise en œuvre dans la méthode Neyer [4] d'estimation de fiabilité des systèmes mono-coup, utilisée dans le domaine de la pyrotechnie, cette méthode de planification peut être généralisée aux essais de fiabilité et de dégradation accélérés et bénéficier des techniques bayésiennes pour tenir compte d'une éventuelle connaissance a priori.

L'emploi de la D-optimalité associé à une technique bayésienne particulière consistant à remplacer la connaissance a priori en essais fictifs, au moyen de deux boucles d'optimisation imbriquées, constitue une méthode générique nouvelle de planification optimale d'essais que nous avons nommé la « méthode Caboum ».

Illustrée par des exemples de mise en œuvre d'essais de fiabilité et de dégradation accélérés, cette communication décrit cette méthode qui est supportée par l'outil d'optimisation globale Gencab [6] de la société Cab Innovation. En effet, l'utilisation d'un outil d'optimisation stochastique s'avère indispensable pour ce type de traitement. Dans le domaine non linéaire, qui caractérise l'essentiel des essais de fiabilité et de dégradation, l'application de la méthode D-optimale n'est pas courante car les algorithmes d'optimisation utilisés (Fedorov, Wynn, etc.) peuvent difficilement s'affranchir des divers optima du déterminant de la matrice de Fisher, notamment quand les conditions d'essais portent sur plusieurs covariables.

### Planification optimale d'essais de fiabilité et dégradation

Durant une campagne d'expérimentation, les conditions d'essais préconisés par la méthode D-optimale sont choisis de manière à conforter l'estimation courante établie à partir des essais déjà réalisés (ou d'une connaissance a priori). La planification est séquentielle si l'on ne cherche qu'à déterminer les conditions de l'essai suivant ou par lot si les conditions de plusieurs essais sont définies simultanément. Ces conditions d'essais constituent autant d'inconnues (covariables) qui seront déterminées en maximisant le déterminant de la matrice de Fisher.

L'estimation des paramètres ( $\theta_1, \theta_2 \dots$ ) d'un modèle statistique (fiabilité, dégradation, courbe de réponse..) s'effectue principalement par la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à maximiser la vraisemblance (probabilité ou densité de probabilité d'obtenir des données observées ou les résultats des essais réalisés) pouvant être donnée par le modèle.

A partir de l'expression de la vraisemblance, la matrice de Fisher peut se calculer par double dérivation du logarithme de la vraisemblance puis calcul de l'espérance {1}. Les termes de la matrice et son déterminant sont alors calculés à partir des résultats d'essais déjà réalisés et des conditions d'essais à planifier qui constituent autant d'inconnues à estimer.

$$F = \begin{pmatrix} I_{00} & I_{01} \\ I_{10} & I_{11} \end{pmatrix} = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta_2^2} \end{pmatrix} \quad \{1\}$$

Donnés à titre d'illustration, les deux exemples détaillés dans cet article portent sur la planification séquentielle d'essais simulés de fiabilité accélérés en vibration et de dégradation accélérés en température.

## 1 Essais de fiabilité accélérés en vibration

Le modèle statistique utilisé dans l'exemple de la figure 1 est une loi de Weibull couplée à une loi de Basquin. Le modèle de Basquin {2} est employé traditionnellement comme modèle d'accélération en fatigue (colonne Fa) en fonction du niveau vibratoire ( $C_A$ ) par rapport à un niveau de référence ( $C_R$ ). Une valeur Grms (Root-Mean-Square Acceleration) peut être utilisée pour exprimer l'énergie globale d'une vibration aléatoire.

$$AF = (C_A / C_R)^p \quad \{2\}$$

La densité de la loi de Weibull accéléré à 2 paramètres est donnée par l'expression {3} et celle de la fiabilité par l'expression {4}.

$$f_A(X_i; \beta, \sigma, p) = AF * f_R(AF * X_i; \beta, \sigma) \quad \text{avec} \quad f(X_i; \beta, \sigma) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^\beta\right) \quad \{3\}$$

$$F_A(X_i; \beta, \sigma, p) = F_R(AF * X_i; \beta, \sigma) \quad \text{avec} \quad F(X_i; \beta, \sigma) = \exp\left(-\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^\beta\right) \quad \{4\}$$

La log vraisemblance est la somme des logarithmes (colonne  $\ln(L(X))$ ) de la densité pour l'ensemble des résultats d'essais non censurés ou de la fiabilité en cas de censures à droite, soit un fonctionnement sans panne pendant toute la durée d'essai considérée ici constante ( $T$ ). La double dérivation de la log vraisemblance permet de calculer la matrice de Fisher (colonne lij) qui a pour expression la formule {5}.

$$F = I_n(\beta, \sigma, p) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial p} \\ \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial p} \\ \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial p \partial \beta} & \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial p \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \ln L(X; \beta, \sigma, p)}{\partial p^2} \end{pmatrix} \quad \{5\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta^2} = \frac{-n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \left[ \ln\left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right) \right]^2 - k \left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \left(\ln\left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \left( \beta \ln\left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right) + 1 \right) + \frac{k}{\sigma} \left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \left(1 + \beta \ln\left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)\right) = \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial p} = n \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) \left[ \beta \ln\left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right) + 1 \right] - k \left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) \left[ \beta \ln\left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right) + 1 \right] = \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial p \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma^2} = \frac{n\beta}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \left( \frac{\beta(\beta+1)}{\sigma^2} \right) - k \frac{\beta(\beta+1)}{\sigma^2} \left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial p^2} = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \beta^2 \left( \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) \right)^2 - k \left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \beta^2 \left[ \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left(\frac{X_i * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \beta^2 \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) + k \beta^2 \left(\frac{T * C_A^p}{\sigma * C_R^p}\right)^\beta \ln\left(\frac{C_A}{C_R}\right) \frac{1}{\sigma} = \frac{\partial^2 \ln L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial p \partial \sigma}$$

Dans l'exemple de la figure 1, tous les résultats d'essais (colonne X) ont été simulés au moyen de la fonction inverse de la loi de fiabilité accélérée {6} de paramètres  $\beta_i = 2,5$ ,  $\sigma_i = 2000$  et  $p_i = 3$  a priori inconnus à différentes conditions de vibration (colonne C). Le but de l'exercice est de retrouver ces 3 paramètres par une estimation fondée sur les résultats d'un minimum d'essais.

$$X_i = -AF * \sigma (\ln(aled))^{1/\beta} \quad \{6\}$$

Un certain nombre d'essais est nécessaire pour réaliser une première estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance (4 dans cet exemple). Les conditions des suivants ont été définies de manière séquentielle par la méthode D-optimale à partir de l'estimation courante des paramètres du modèle inscrits dans les trois dernières colonnes. Pour le prochain essai, le niveau de vibration (colonne C) est calculé en maximisant le déterminant de la matrice de Fisher dans laquelle la

densité de probabilité et la fiabilité de l'essai suivant sont pondérées respectivement par la probabilité de défaillance avant et après T. Dans le cas non censuré, l'espérance de la variable peut être calculée par intégration numérique ou à partir de la formule {7}.

$$E(X / X < T) = \int_0^T R(t)dt = \frac{1}{F_a} \int_0^T e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\beta} dt = \frac{1}{F_a} \frac{\sigma}{\beta} \gamma \left[ \frac{1}{\beta}, \left(\frac{T}{\sigma}\right)^\beta \right] = \frac{1}{F_a} \frac{\sigma}{\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \int_0^{\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\beta} f_\gamma\left(\frac{1}{\beta}, 1\right) dt \quad \{7\}$$

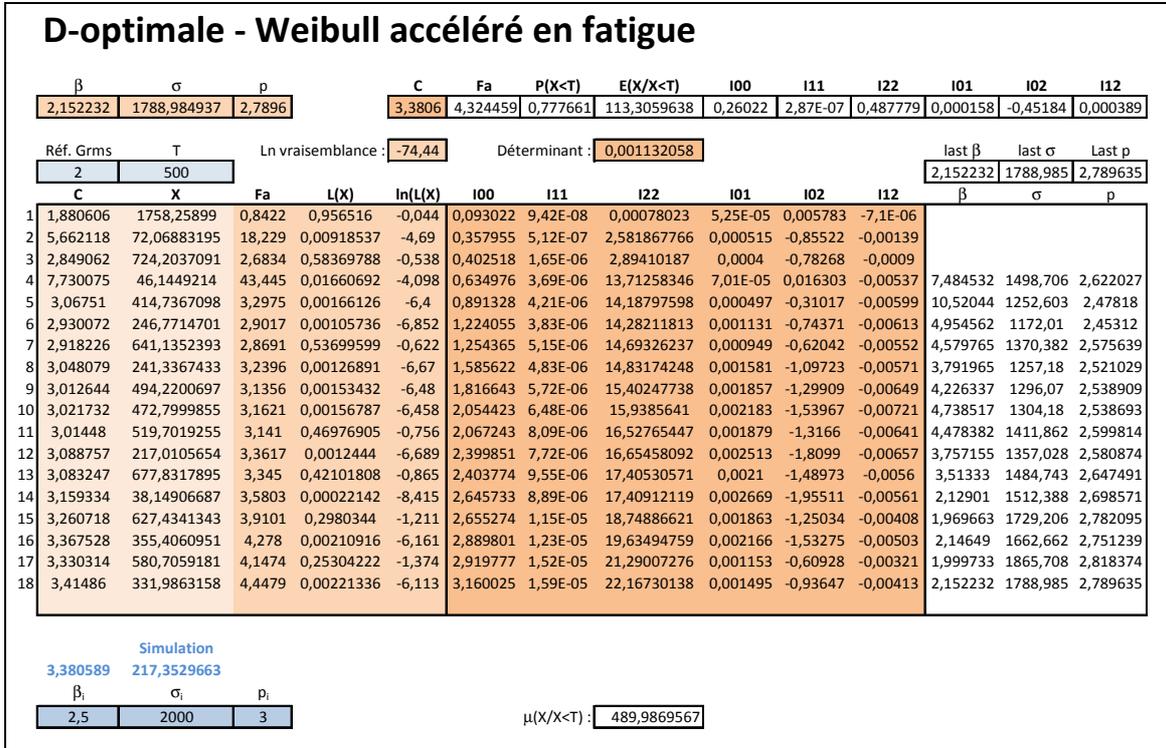


Figure 1. Essais de fiabilité accélérés en vibration

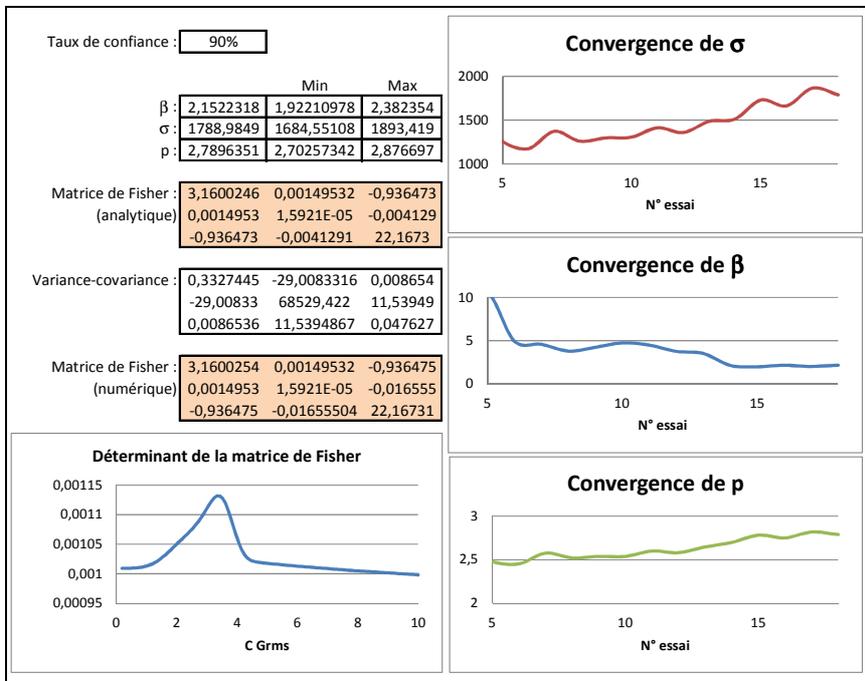


Figure 2. Résultats

La figure 2 montre la convergence des trois estimateurs au cours des essais (la convergence n'est pas encore atteinte). Elle

donne également l'expression finale de la matrice de Fisher calculée de manière analytique et par une méthode numérique propre à l'outil d'optimisation [5], ce qui permet de vérifier la justesse des formules utilisées. La matrice de variance-covariance est calculée par inversion de la première matrice et est utilisée pour obtenir des intervalles de confiance asymptotiques sur chacun des paramètres par la méthode de Wald. La courbe d'évolution de la matrice de Fisher montre un maximum à 3,3806 Grms pour le prochain essai.

## 2 Essais de dégradation accélérés en température

Le modèle statistique utilisé dans l'exemple de la figure 3 est un processus de Wiener couplé à la loi d'Arrhenius.

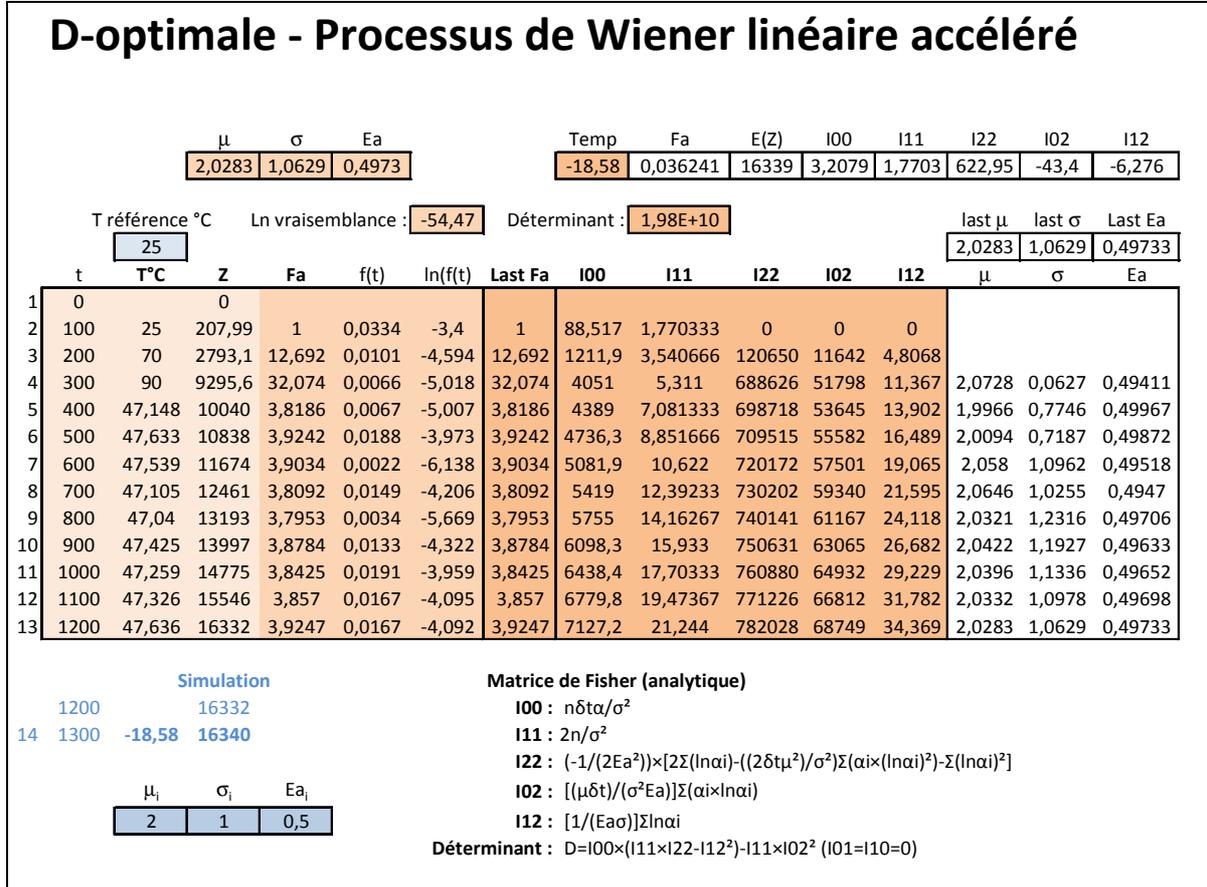


Figure 3. Essais de dégradation accélérés en température

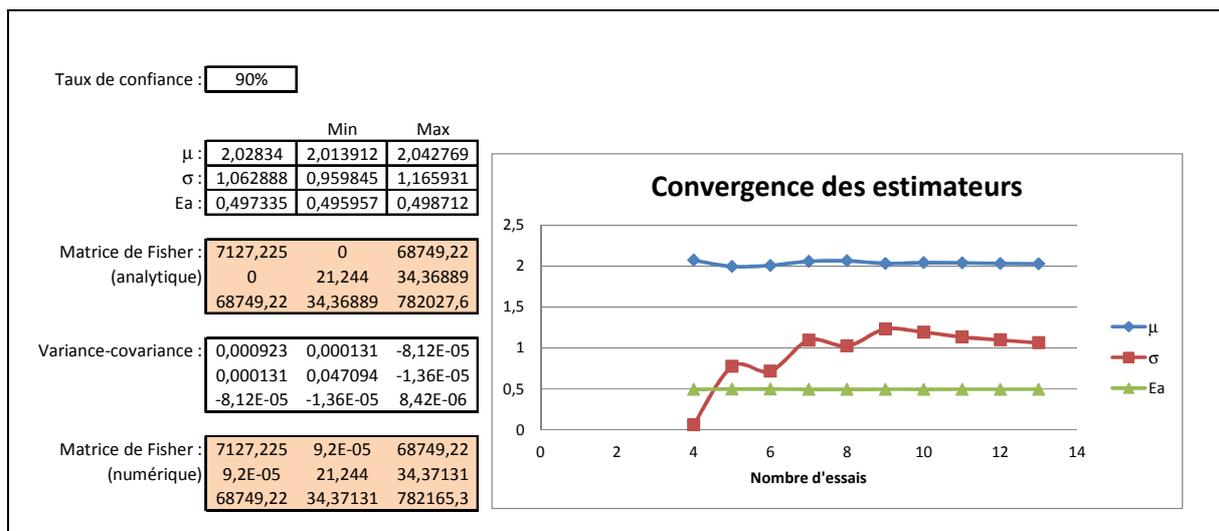


Figure 4. Résultats

Un processus de Wiener de tendance linéaire  $m$  se caractérise par une loi d'évolution  $Z(t+h)-Z(t)$  qui suit une loi normale d'espérance  $mh$  et d'écart-type  $\sigma\sqrt{h}$ . Au moyen d'une fonction croissante  $m(t)$ , ce processus peut être rendu non linéaire en remplaçant  $mh$  par  $m(t+h)-m(t)$  avec  $m(t)$  une fonction égale à  $p t^q$  avec  $p$  et  $q > 0$ , par exemple. Afin de ne pas complexifier inutilement cette publication, l'exemple choisi est de tendance linéaire.

L'accélération agit sur la courbe de dégradation par un simple facteur d'échelle. La loi d'évolution  $Z(t+h)-Z(t)$  suit alors une loi normale d'espérance  $mF_a h$  et d'écart-type  $\sigma\sqrt{F_a h}$ .

Le facteur d'accélération en température est celui d'Arrhenius référencé à 25°C :  $F_a = \exp(E_a/K (1/(273+25) - 1/(273 + T°C)))$  avec  $E_a$  l'énergie d'activation (inconnue) et  $K$  la constante de Boltzmann ( $8,6171 \cdot 10^{-5} \text{ eV/°K}$ ).

La densité de la loi normale accélérée est donnée par l'expression {8}.

$$f_{T^\circ C}(\Delta Z) = F_a f_{25^\circ C}(F_a \Delta Z) \quad \text{avec} \quad f(\Delta Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{(\Delta Z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad \{8\}$$

La log vraisemblance est la somme des logarithmes de cette densité pour l'ensemble des résultats d'essais. Sa double dérivation permet de calculer la matrice de Fisher qui a pour expression la formule {9}.

$$F = I_n(X, \mu, \sigma, E_a) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \mu \partial \beta} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \mu \partial E_a} \\ \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \sigma \partial E_a} \\ \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial E_a \partial \mu} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial E_a \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial E_a^2} \end{pmatrix} \quad \{9\}$$

$$F = I_n(X, \mu, \sigma, E_a) = \begin{pmatrix} n\delta F_a / \sigma^2 & 0 & (\mu\delta / \sigma^2 E_a) \sum_1^n (F_a, \ln(F_a)) \\ 0 & 2n / \sigma^2 & 1/E_a \sum_1^n \ln(F_a) \\ \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \mu \partial E_a} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \mu, \sigma, E_a)}{\partial \sigma \partial E_a} & -(1/E_a^2) \left( \sum_1^n \ln(F_a) - (\delta\mu^2 / \sigma^2) \sum_1^n (F_a, \ln(F_a))^2 - 1/2 \sum_1^n \ln(F_a)^2 \right) \end{pmatrix}$$

Dans l'exemple de la figure 3, tous les résultats d'essais ( $Z$ ) ont été simulés au moyen de la fonction inverse de la loi normale accélérée de paramètres  $\mu_i = 2$ ,  $\sigma_i = 1$  et  $E_a = 0,5$  a priori inconnus ; le but de l'exercice étant d'estimer ces 3 paramètres à partir d'un minimum d'essais. Les trois premiers essais ont été effectués respectivement à 25, 70 et 90°C et les suivants à la température obtenue de manière séquentielle par la méthode D-optimale à partir de l'estimation courante des paramètres du modèle. Inscrits dans les trois dernières colonnes, ces paramètres ne peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance qu'après un minimum de 3 essais. La figure 4 montre la convergence des trois estimateurs au cours des essais. Elle donne également l'expression finale de la matrice de Fisher calculée de manière analytique et numérique et des intervalles de confiance asymptotiques sur chacun des paramètres. La figure 5 représente la courbe d'évolution du déterminant de la matrice de Fisher en fonction de la température. Celle-ci présente trois maximums, deux aux températures extrêmes et l'un à une température intermédiaire qui est celle retenue pour les essais.

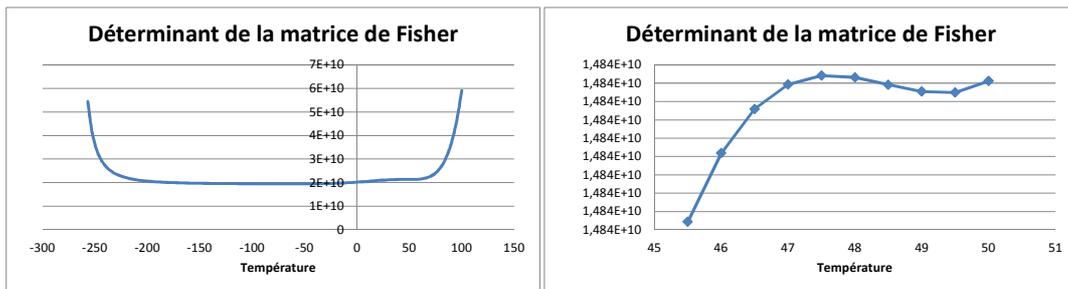


Figure 5. Courbe d'évolution du déterminant de la matrice de Fisher

### Prise en compte d'une connaissance a priori

Une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance ne peut être réalisée qu'à partir d'un certain nombre d'essais qui satisfont certaines conditions propres au modèle considéré. Ces essais peuvent être remplacés par des essais virtuels à partir d'une connaissance a priori, au moyen d'une méthode bayésienne. Pour ce faire, un traitement simple et robuste peut être réalisé au moyen d'un outil d'optimisation globale. Celui-ci consiste à transformer la connaissance a priori en un minimum de résultats d'essais virtuels, au moyen de deux boucles d'optimisation imbriquées. La première estime les paramètres recherchés à partir de résultats d'essais virtuels par la méthode du maximum de vraisemblance sous le contrôle de la seconde qui veille à ce que la configuration d'essais conduise à une estimation conforme à la connaissance a priori tout en satisfaisant les conditions de faisabilité propres à l'estimation. Développée tout d'abord pour estimer la fiabilité des systèmes mono coup [4], cette méthode

originale de planification et d'exploitation optimale des essais peut être généralisée à la plupart des plans d'expériences, dont notamment les essais accélérés de fiabilité ou de dégradation, pour caractériser les courbes de réponse. Désignée dorénavant sous le nom de méthode "Caboum", le principe de cette méthode est synthétisé en figure 5.

### Méthode Caboum de planification et d'exploitation optimale des essais

- 1) **Phase d'initialisation**  
Transformation de la connaissance a priori en un nombre minimal d'essais virtuels satisfaisant les conditions nécessaires à l'estimation des paramètres recherchés par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette transformation résulte de deux boucles d'optimisation imbriquées.  
  
Boucle principale : Recherche d'une configuration d'essais  $X_1 \dots X_p$   
  
 Critère :  $\hat{\theta} \rightarrow \theta_{a\ priori}$       Contrainte : Conditions de faisabilité propres à l'estimation  
  
Boucle secondaire : Estimation de  $\hat{\theta}$  à partir de  $X_1, \dots, X_p$ , par la méthode du maximum de vraisemblance
- 2) **Planification optimale**  
Planification d'un ou de plusieurs essais par la méthode D-optimale.
- 3) **Exploitation des résultats d'essais**  
Estimation des paramètres recherchés par la méthode du maximum de vraisemblance  
  
Actualisation des essais virtuels à partir des résultats de l'estimation courante afin de diminuer le poids de la connaissance a priori initiale.
- 4) **Planification éventuelle de nouveaux essais**  
Retour à l'étape 2.
- 5) **Exploitation finale des résultats**  
Estimation des paramètres recherchés par la méthode du maximum de vraisemblance à partir de l'ensemble des résultats des essais réalisés, en conservant ou supprimant les essais virtuels traduisant l'a priori (si les conditions relatives à l'estimation restent satisfaites).

Figure 5. Principe de la méthode Caboum

En appliquant cette méthode, l'initialisation de l'exemple de la figure 1 est reprise à la figure 6 avec une connaissance a priori des paramètres égale à  $\beta = 3$ ,  $\sigma = 1000$  et  $p = 2$ . Cette connaissance est transformée en 4 essais fictifs non censurés qui donne une estimation des estimateurs très proche de l'a priori.

D-optimale - Weibull accéléré en fatigue															
A priori :															
$\beta$	$\sigma$	$p$	C	Fa	P(X<T)	E(X/X<T)	I00	I11	I22	I01	I02	I12			
3	1000	2	3,057418	1000,000016	2,047	3,7459	3,613081	0,997756	134,4251323	0,168724	-1,5E-06	0,454081	0,000827	-0,54907	-0,00056
Réf.	Grms	T	Ln vraisemblance : -30,66			Déterminant : -5,57436E-07			last $\beta$			last $\sigma$	Last p		
2		500							3,057418			1000	2,047043		
	C	X	Fa	L(X)	ln(L(X))	I00	I11	I22	I01	I02	I12	$\beta$	$\sigma$	$p$	
1	4,573368	216,8498159	5,4364	0,00446091	-5,412	0,151768	1,75E-05	10,57648591	-0,00149	1,229133	-0,01279				
2	1,246347	1758,917555	0,3798	0,00037839	-7,88	0,168948	1,75E-05	10,58950124	-0,00146	1,241142	-0,01281				
3	1,666766	668,7796366	0,6886	0,00038897	-7,852	0,212593	1,8E-05	10,60142244	-0,00137	1,256955	-0,01288				
4	0,677093	11444,04767	0,1089	7,3709E-05	-9,515	0,21375	1,8E-05	10,60292111	-0,00137	1,258124	-0,01288	3,057418	1000	2,047043	
	3,74592														

Figure 6. Essais de dégradation accélérés en température

## Numérisation de la méthode de calcul

Le déterminant de la matrice de Fisher est propre à chaque type d'essais et de modèle de fiabilité ou de dégradation et son expression analytique est particulièrement fastidieuse à déterminer au cas par cas, non sans risque d'erreur.

Une méthode numérique originale de calcul des termes de la matrice de Fisher, menée à l'issue d'un ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance, a fait l'objet d'une communication au congrès ESREL 2012 [5] et est déjà intégrée dans l'outil Gencab. Cette méthode peut être étendue à la D-optimalité de manière à pouvoir optimiser le choix d'essais additionnels à une série d'essais déjà réalisés au cours d'un plan d'expériences.

Décrite en figure 7, son principe repose à nouveau sur deux boucles d'optimisation imbriquées. La première estime les paramètres recherchés par la méthode du maximum de vraisemblance, à partir des résultats d'essais déjà réalisés et de conditions d'essais futurs dont l'espérance des résultats est calculée à partir de l'estimation courante des paramètres, et calcule le déterminant de la matrice de Fisher. La seconde contrôle la première de manière à ce que la configuration d'essais conduite à une valeur minimale de ce déterminant tout en satisfaisant les conditions de faisabilité propres à l'estimation.

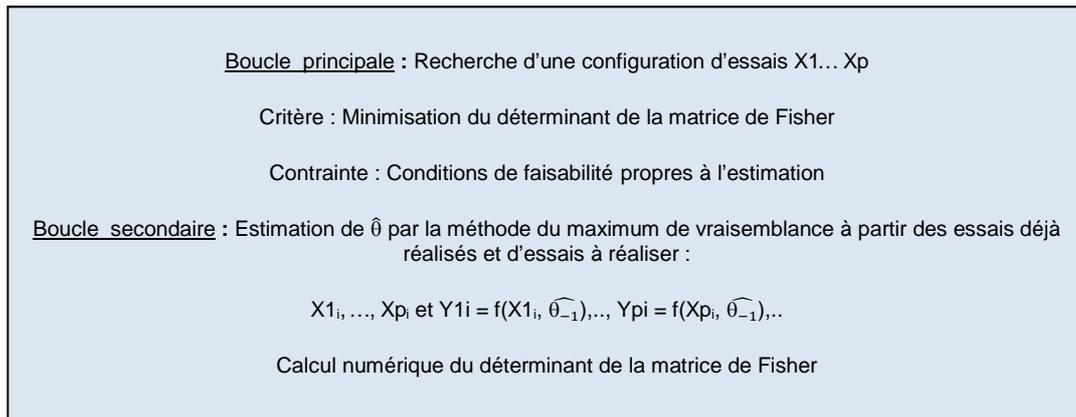


Figure 7. Numérisation de la méthode de calcul

## Conclusion

La méthode "Caboum" de planification optimale et d'exploitation d'essais est fondée sur la D-optimale et une technique bayésienne mettant en œuvre des boucles d'optimisation imbriquées.

Ayant déjà démontré son efficacité par simulation pour les systèmes mono-coup [4], elle peut être généralisée à la plupart des plans d'expériences, dont les essais accélérés de fiabilité ou de dégradation, afin de caractériser les courbes de réponse. Elle est alors susceptible d'améliorer les résultats d'essais ou d'en diminuer le coût en réduisant leur nombre.

Outre le domaine stochastique de la fiabilité, la planification peut également concerner des expérimentations dont la réponse est déterministe. Cette dernière peut être non linéaire et fortement contrainte comme dans le cas des plans d'expériences relatifs aux mélanges rencontrés en chimie ou pharmacie notamment.

## Références

- [1] Smith, Kirstine (1918). "On the standard deviations of adjusted and interpolated values of an observed polynomial function and its constants and the guidance they give towards a proper choice of the distribution of observations". *Biometrika*
- [2] Guttorp, P.; Lindgren, G. (2009). "Karl Pearson and the Scandinavian school of statistics". *International Statistical Review* 77: 64.
- [3] Optimal design, from the free encyclopedia Wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal\\_design](https://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_design)
- [4] C. Etcheverry, M. Pouligny, S. Bosse, A. Cabarbaye, Amélioration de la méthode Neyer d'estimation de fiabilité des systèmes mono coup utilisée en pyrotechnie, Lambda mu 20, 11-13/10/2016, Saint Malo
- [5] A. Cabarbaye, A. Tanguy, S. Bosse, Adjustment of complex probabilistic models and estimation of confidence intervals in a discrete manner, PSAM11 & ESREL 2012, 25 - 29 June 2012, Helsinki
- [6] A. Cabarbaye. Outil générique d'optimisation dans le domaine discret et/ou continu éventuellement stochastique, ROADEF'03 - Avignon, 2003.