

# Dimensionnement probabiliste et optimisation des systèmes par des modèles de simulation hybrides

André CABARBAYE  
CNES / CAB INNOVATION  
3 rue de la Coquille – 31500 Toulouse  
andre.cabarbaye@cnes.fr /  
andre.cabarbaye@cabinnovation.fr

Karine Etienne  
Centre National d'Etudes Spatiales (CNES)  
18, avenue Edouard Belin - 31401 Toulouse  
karine.etienne@cnes.fr

## Résumé

L'objet de cette communication est de montrer l'intérêt d'une approche probabiliste au dimensionnement des systèmes et de présenter des techniques originales de modélisation, simulation et optimisation des systèmes à états discrets hybrides (régis par des phénomènes aléatoires et continus) pour sa mise en œuvre. Elle préconise également l'utilisation d'une méthode de validation à partir des résultats de simulation.

## Summary

The purpose of this paper is to show the value of a probabilistic approach to systems design and to present innovative techniques for modelling, simulation and optimization of hybrid discrete states systems (with random and continuous variables) for his implementation. It also advocates the use of a validation method from simulation results.

---

## Introduction

Poussé par une complexité toujours croissante, un contexte concurrentiel exacerbé et une forte demande de fiabilité opérationnelle de la part des usagers (disponibilité de service), le dimensionnement des systèmes se fonde de plus en plus souvent sur des approches probabilistes qui remplacent progressivement les évaluations déterministes en pire cas.

Ainsi dans le domaine spatial, les satellites sont traditionnellement dimensionnés pour assurer une mission de référence dans des pires cas de fonctionnement qui combinent les diverses conditions extrêmes (fin de vie, éclipses, conditions énergétiques défavorables, températures limites, etc.). Mais cette approche, qui simplifie la validation des systèmes en limitant les vérifications à un cas de référence unique, conduit à un surdimensionnement général et à l'impossibilité de bénéficier de certains effets de seuil, tels que l'emploi de plateformes ou de lanceurs de plus faible capacité. Ce surdimensionnement devient d'autant plus prégnant que les systèmes deviennent des « systèmes de systèmes », tels que les constellations de satellites par exemple, dans lesquels une insuffisance temporaire de l'un des constituants est partiellement compensée par les autres, ce qui se traduit plus souvent par une dégradation du service offert qu'une perte complète de ce dernier.

Aussi des dimensionnements probabilistes de systèmes satellitaires peuvent-ils être envisagés en considérant globalement les aléas de toute nature portant sur la mission (le carnet de commande correspondant, par exemple, aux images à prendre par un satellite d'observation de la Terre), les conditions orbitales (position, attitude...) et l'état du système à l'instant courant (défaillances et dégradations à bord, capacité énergétique, etc.). On accepterait alors tout aussi bien que le fonctionnement d'un satellite puisse être interrompu par les conséquences de phénomènes aléatoires (pannes, phénomènes radiatif...) que par son incapacité à couvrir des cas relativement rares, en raison de performances insuffisantes ou d'un manque transitoire de ressources, dans la mesure où il répond globalement à l'exigence de disponibilité qui lui a été allouée. En revanche, des sollicitations supérieures à celle de la mission de référence (nombre de prises d'image par exemple) pourraient être occasionnellement tolérées si les ressources disponibles à bord le permettent (notamment en début de vie).

Cette approche probabiliste concerne également le dimensionnement des structures et mécanismes pour lesquels la propagation des incertitudes au travers d'un modèle de calcul mécanique permet d'évaluer l'incertitude sur les réponses étudiées. Elle conduit à des probabilités de défaillance en cohérence avec les allocations de fiabilité (méthode résistance contrainte) qui se révèlent plus rationnelles que de simples coefficients de sécurité sans réelle maîtrise des dispersions. Outre l'analyse des ruptures et dysfonctionnements éventuels, elle permet également d'estimer des dispersions relatives à des caractéristiques géométriques qui peuvent être réinjectées dans des analyses pire cas de niveau supérieur (un instrument optique par exemple).

Mais comment mettre en œuvre une telle approche ? Au delà de calculs approchés tels que ceux des méthodes FORM/SORM utilisées en mécanique, l'approche probabiliste impose l'emploi de la simulation. Si le développement d'un simulateur dédié dans un quelconque langage de programmation est alors envisageable, l'utilisation d'une méthode de modélisation comportementale peut faciliter sa réalisation et sa validation. Elle offre, en effet, à l'utilisateur une interface de représentation de son système et les outils qui la supportent proposent des fonctionnalités diverses et la possibilité de réutilisation de constituants déjà développés. Ainsi, les réseaux de Petri stochastiques constituent une méthode très prisée de représentation des processus séquentiels, mais sa capacité à traiter des systèmes hybrides apparaît limitée. Or qu'ils s'agissent de satellites ou de trains par exemple dans le cas d'une application terrestre, les systèmes complexes agrègent, pour la plupart, des variables aléatoires (sollicitation, défaillance, dégradation, etc.) et continues (position dans l'espace, état énergétique...) qu'il est difficile de séparer lors d'une évaluation. En revanche, cette double dimension peut être considérée dans les modèles de simulation récursive [7]. Fondée sur la récursivité, cette autre méthode de modélisation ne cherche pas à représenter le système durant toute sa mission mais se contente de décrire son comportement entre deux instants courants au moyen d'une transition générique entre états. En outre ces modèles peuvent se coupler à des outils d'optimisation globale afin de rechercher des configurations optimales de paramètres à partir de résultats de simulation.

Mais comment démontrer la tenue d'objectifs à partir de résultats de simulations ? L'approche probabiliste a déjà été mise en œuvre au Centre Spatial de Toulouse dans le cadre de dimensionnement de satellites ou de constellations de satellites. Elle a notamment permis d'effectuer des optimisations en comparant globalement les performances et coûts de systèmes aux caractéristiques très différentes (petit ou gros satellites, globalement redondés ou non, longue ou moyenne durée de vie, nombre de satellites sur différents plans d'orbite, processus de déploiement et de renouvellement, etc.). Cette communication illustre cette approche à travers quelques exemples et préconise la méthode de Wilks [1] par rapport à d'autres méthodes plus récentes pour valider les caractéristiques d'un système à partir de résultats de simulation.

## 1 Modèles de simulation réursive

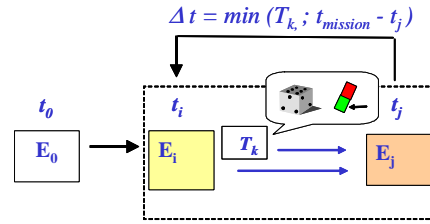


Figure 1. Modèles de simulation réursive

Mise en œuvre sous Excel par le logiciel SIMCAB de la société CAB INNOVATION, la modélisation réursive [7] est une technique de simulation des systèmes hybrides à états discrets. Illustrée par la figure 1, elle consiste à décrire une transition générique entre deux instants courants  $t$  et  $t+\Delta t$  correspondant à l'occurrence de changements aléatoires d'états (défaillance, remise en service...) ou au franchissement de certains seuils par des variables continues (position, alarme...).

En partant d'un état initial  $E_0$ , l'outil recopie l'état  $E_j$  de sortie du modèle (défini dans une plage de cellules) dans l'état  $E_i$  en entrée du modèle (dans une plage similaire), pendant toute la durée de la mission, en prenant comme incrément de temps ( $\Delta t = \min T_k$ ) la plus petite valeur parmi les différentes durées de transition possibles tirées aléatoirement ou calculées dans une autre plage de cellules. L'état  $E_j$  est défini à partir de l'état  $E_i$  et de la transition correspondant à la valeur  $\Delta t$ .

Les durées  $T_k$  sont recalculées à chaque transition dans le cas markovien ou calculées une seule fois puis décrémentées jusqu'à l'occurrence de l'événement correspondant dans le cas contraire.

## 2 Exemples d'application

Différentes problématiques de dimensionnement de systèmes spatiaux ont été traitées par des modèles de simulation réursive. Nous en présentons ci-après les plus représentatives.

### 2.1 Programme d'observations scientifiques soumis à aléas

Un programme d'observation scientifique doit être réalisé par un satellite dont la durée de vie est limitée par la capacité en ergol et différents phénomènes d'usure (mécanismes, dose cumulée de radiation reçue par certains composants, etc.) et susceptible d'être perdu en cours de mission par d'éventuels dysfonctionnements (fiabilité). Ce satellite est par ailleurs soumis à divers aléas, tels que la perte d'une redondance, une reconfiguration suite à événements radiatifs, un besoin de calibration, l'éblouissement d'un capteur, une éclipse ..., qui ont tous pour effet d'interrompre l'observation en cours pour une durée plus ou moins longue et de nécessiter une redéfinition de la séquence des observations non encore réalisées, dont chacune a une durée propre et peut être contrainte par certaines conditions extérieures. Comment dimensionner le satellite et quelle stratégie d'observation adopter pour avoir de bonne chance de réussir la mission dans sa globalité ?

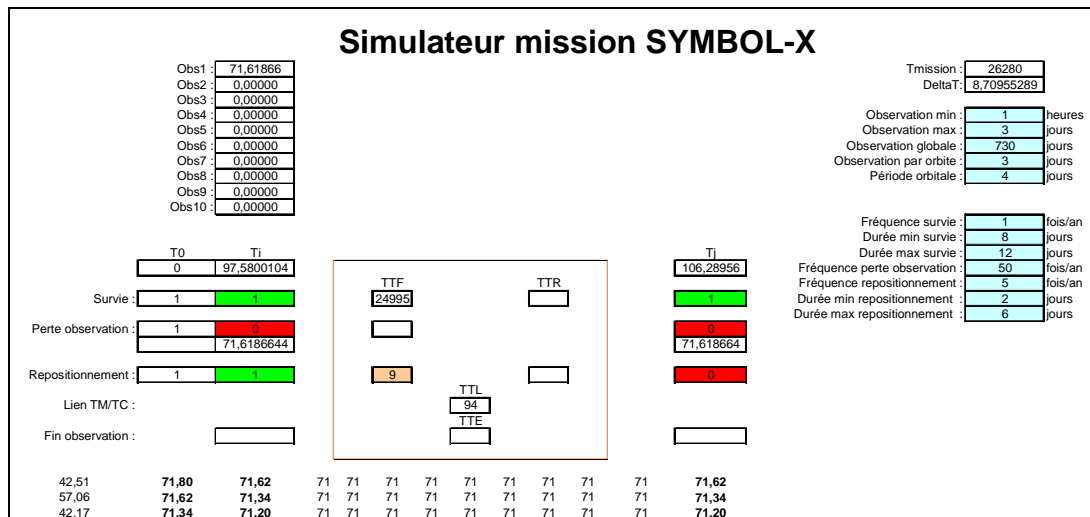


Figure 2. Simulateur de la mission Symbol-X

Ce type de problématique concerne de nombreuses missions scientifiques dont celle de physique fondamentale du satellite Microscope, qui a pour objet la vérification du principe d'équivalence entre la masse inerte et la masse gravitationnelle, ou celle d'astrophysique des hautes énergies de Symbol-X qui devait mettre en œuvre deux satellites en vol en formation (co-localisés). Présenté en figure 2, le simulateur de cette seconde mission choisit dans une importante liste d'observations à réaliser, selon une stratégie définie a priori (les plus longues en priorité), celles à effectuer durant la prochaine période orbitale de 4 jours (de 1 à 10 observations par orbite). Au cours de celle-ci, divers aléas sont susceptibles de faire perdre une observation, voire toutes les observations non encore retransmises à la Terre lors des passages à proximité de celle-ci. La programmation est alors redéfinie en temps réel afin d'occuper au mieux la durée restante de la période orbitale et d'optimiser les suivantes.

## 2.2 Système de stations de réception en visibilité transitoire

Comment évaluer la probabilité et la durée de transmission de données satellitaires vers des stations de réception au sol, en considérant la visibilité transitoire de ces dernières par rapport à un satellite défilant ainsi que leurs défaillances éventuelles ? Telle est la problématique de la mission SVOM, illustrée en figure 3, dont l'objet est de détecter des sursauts de rayonnement gamma, traduisant un élément violent de l'univers comme une explosion d'étoile, par un satellite en orbite basse qui doit alors prévenir le plus rapidement possible de grands télescopes terrestres, via un réseau d'une quarantaine de stations de réception réparties à la surface du globe à proximité de l'équateur, afin que ceux-ci puissent observer le phénomène.

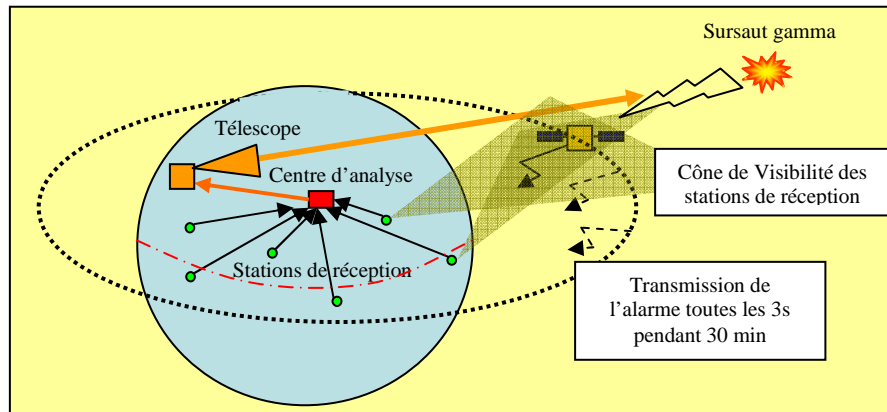


Figure 3. Mission SVOM

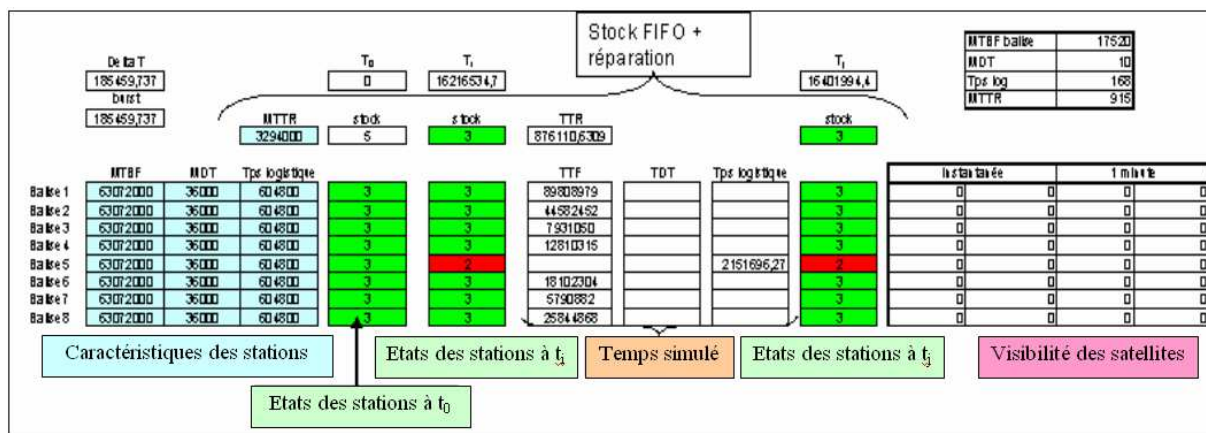


Figure 4. Modèle de simulation SVOM

Présenté en figure 4, le modèle SVOM permet de simuler l'état des stations de réception avec la logistique associée ainsi que l'occurrence des sursauts gamma (burst). A chaque burst, il calcule la position orbitale du satellite, identifie la liste des stations en visibilité immédiate ou plus lointaine puis calcule le délai de transmission de l'alerte. Une optimisation du nombre de stations au sol et de leur répartition géographique ainsi que des caractéristiques de leur soutien logistique (stock de rechange, durées de réparation et de transport, etc.) peut ainsi être réalisée.

## 2.3 Système d'observation des situations de crises

Comment concevoir un système satellitaire d'observation des situations de crises (catastrophe naturelle, conflit...) en limitant les délais d'accès et de revisite des sites concernés ? Une constellation de satellites en orbite basse est-elle préférable à quelques satellites géostationnaires ? Faut-il privilégier des satellites gros, fiables et à longue durée de vie plutôt que des satellites plus petits ? Des satellites lancés dans l'urgence ont-ils un sens, de même que des corrections significatives d'orbite par des satellites dotés de gros réservoirs d'ergol ? Quelle stratégie de déploiement et de renouvellement faut-il adopter ? Telle est la problématique étudiée dans le cadre de différents avant-projets au CNES dont il est difficile de répondre sans passer par le développement d'un simulateur comportemental permettant de comparer différentes solutions en termes de performance et de coût sur un horizon glissant de plusieurs dizaines d'années. Le modèle simule l'état et les évolutions du système satellitaire ainsi que l'occurrence, la durée et la localisation de crises à la surface du globe. Il évalue alors les délais d'accès et de revisite des sites concernés par le système dans son état courant.

## 2.4 Centre de contrôle et de mission de satellites

Outre les satellites, les systèmes satellitaires comprennent différents moyens au sol. Les centres de contrôle permettent de surveiller la bonne santé des équipements et de déterminer et réactualiser les paramètres des orbites à partir de mesures de localisation. Les centres de mission exploitent les données acquises par les charges utiles après en avoir assuré la programmation. Les stations d'émission / réception dialoguent au moyen d'antennes avec les satellites lors de leur passage en visibilité (à l'exception des satellites géostationnaire toujours visibles). Ces moyens regroupent de nombreux constituants susceptibles de tomber en panne et d'être réparés ou remplacés par des éléments de rechange.

La disponibilité du service offert implique que l'ensemble de la chaîne fonctionnelle allant de la demande d'un utilisateur jusqu'à la fourniture de l'objet de sa requête soit opérationnel de bout en bout avec d'éventuelles interruptions suffisamment courtes pour ne pas en faire perdre l'intérêt. Mais comment évaluer cette disponibilité sachant que l'impact des dysfonctionnements des moyens au sol dépend de la position des satellites à ces instants ; ces derniers pouvant perdre un ou plusieurs passages en émission ou réception avec des conséquences plus ou moins graves (simple retard, dégradation ou perte d'observations, etc.). A nouveau la simulation d'un système hybride apparaît incontournable.

## 3 Génération automatique de modèles de simulation d'architecture

Afin de simplifier considérablement l'évaluation d'architectures parfois complexes, un outil de génération automatique de modèles de simulation récursive a été développé et a notamment été utilisé pour dimensionner le segment sol de l'ATV (Automated Transfer Vehicle of the International Space Station). A partir d'une table renseignée par l'utilisateur, cet outil permet de générer automatiquement le modèle de simulation d'un système à partir des caractéristiques de défaillance (à l'état ON, OFF ou à la sollicitation), de réparation, de reconfiguration et de logistique opérationnelle de ses constituants (avec rechanges éventuellement partagés), ainsi qu'une description logique de ses modes de fonctionnement nominaux ou dégradés.

Un exemple très succinct relatif à un centre de mission est présenté en figure 5.

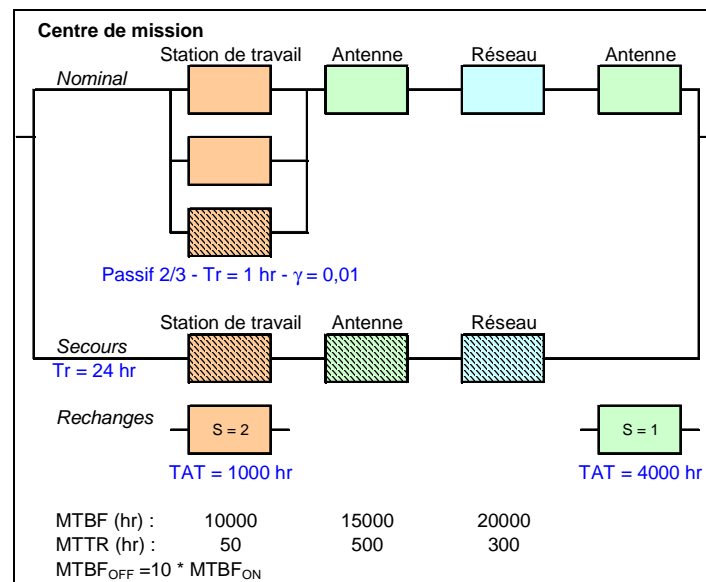


Figure 5. Bloc Diagramme de Fiabilité (BDF) d'un centre de mission

Le centre de mission est constitué de stations de travail, d'antennes et d'un réseau de télécommunication. Deux stations de travail sont utilisées nominalement parmi trois. La perte de l'une d'elles entraîne une diminution de 40 % de la production (nombre d'images traitées par exemple pour un système d'observation de la Terre). Une heure est nécessaire pour activer la redondance avec un risque de 1% de non-fonctionnement à la sollicitation. Un centre de secours est utilisé en cas de perte du nominal. Celui-ci est deux fois moins productif et nécessite 24 heures pour sa mise en route. Un stock de rechanges constitué de deux stations de travail et d'une antenne permet de pallier des délais de retour et de réparation en usine conséquents (TAT). La table correspondant à cet exemple est présentée en figure 6.

Chaque équipement du système est renseigné dans une ligne de la table. Les conditions de mise à l'état OFF des équipements en redondance passive sont définies au moyen des opérateurs ET (\*), OU (+), NON (-) ou combinaison M/N(i+...+k) à partir de l'état de bon fonctionnement d'autres équipements identifiés par leur numéro.

Ainsi, la station de travail 3, en redondance, n'est pas utilisée tant que les 2 premières fonctionnent. Son taux de défaillance  $\lambda_{OFF}$  est alors considéré égal au dixième de celui à l'état ON. Elle n'est opérationnelle qu'après une durée d'une heure (Trecnf) avec un risque de 1% de panne à la sollicitation ( $\gamma$ ). Cette même station de travail utilise le même stock de rechange que l'équipement 1 (station de travail n°1), constitué de 2 unités ; le délai de réapprovisionnement de ce stock (TAT) étant de 1000 heures.

Il est à noter que l'ordre de saisie dans la table des équipements qui utilisent un même stock de rechange définit également l'ordre d'attribution des rechanges et que le stock est décrémenté à la fin de chaque réparation.

Les fonctionnements nominaux ou dégradés du système ou de ses sous-ensembles sont également définis au moyen des opérateurs ET (\*), OU (+), NON (-) et combinaison M/N(i+...+k) mais, cette fois-ci, à partir de l'état d'activation (état ON) d'autres équipements identifiés par leur numéro précédé de la lettre E, ou d'autres états de fonctionnement identifiés par leur numéro précédé de la lettre F.

### Centre de mission

N°	Equipement	Panne		Réparation		Passif					Stock rechange				
		Loi	$\lambda$	Loi	$\mu$	Condition <sub>OFF</sub>	Panne <sub>OFF</sub>		T <sub>Reconf</sub>		$\gamma$	N°	S	TAT	
							Loi	$\lambda_{OFF}$	Loi	T <sub>reconf</sub>				Loi	TAT
1	Station de travail 1	EXP	0,0001	EXP	0,02		EXP		EXP				2	EXP	1000
2	Station de travail 2	EXP	0,0001	EXP	0,02		EXP		EXP			1		EXP	
3	Station de travail 3	EXP	0,0001	EXP	0,02	1*2	EXP	1E-05	EXP	1	0,01	1		EXP	
4	Antenne 1	EXP	7E-05	EXP	0,002		EXP		EXP				1	EXP	4000
5	Réseau 1	EXP	5E-05	EXP	0,00333		EXP		EXP					EXP	
6	Antenne 2	EXP	7E-05	EXP	0,002		EXP		EXP			4		EXP	
7	Station de travail 4	EXP	0,0001	EXP	0,02	1/3(1+2+3)*4*5*6	EXP	1E-06	EXP	24		1		EXP	
8	Antenne 3	EXP	7E-05	EXP	0,002	1/3(1+2+3)*4*5*6	EXP	7E-07	EXP	24		4		EXP	
9	Réseau 2	EXP	5E-05	EXP	0,00333	1/3(1+2+3)*4*5*6	EXP	5E-07	EXP	24				EXP	

Fonctionnement		Condition
1	Nominal	2/3(E1+E2+E3)*E4*E5*E6
2	Dégradé 1	1/3(E1+E2+E3)*E4*E5*E6
3	Secours	E7*E8*E9
4	Dégradé 2	F2+F3
5		
6		

Figure 6. Table renseignée du centre de mission

	T0	Ti	Tj	DeltaT
	0	0	0	0
<b>Equipements</b>				
E1 :	1	1	7435,74	1
E2 :	1	1	14613,35	1
E3 :	1	1	386,57	0,00
E4 :	1	1	3252,46	1
E5 :	1	1	5273,66	1
E6 :	1	1	2105,34	1
E7 :	1	1	19793,75	0,00
E8 :	1	1	49654,76	0,00
E9 :	1	1	6491,24	0,00
<b>Stocks</b>			<b>TAT</b>	
S1 :	2	2		2
S4 :	1	1		1
<b>Fonctions</b>				
F1 :	1			1
F2 :	1			1
F3 :	1			0
F4 :	1			1
<b>Moyenne/mission</b>				
F1 :				1
F2 :				1
F3 :				0
F4 :				1

Figure 7. Simulateur du centre de mission

Le modèle de simulation présenté en figure 7 est généré automatiquement à partir de la table. L'état des équipements, des stocks de rechanges et des fonctions apparaît dans 3 colonnes correspondant aux instants T0, Ti et Tj. L'état actif se caractérise par la valeur 1 (vert), l'état en panne par la valeur 0 (rouge), et l'état passif par l'absence de caractère (gris). Les cellules centrales (bleu) correspondent aux durées Tk tirées aléatoirement, soit les durées avant défaillance (TTF), avant réparation (TTR), avant passage à l'état actif ou passif (TTS) ou avant réapprovisionnement des stocks de rechanges (TAT). Des cellules supplémentaires sont également utilisées pour calculer la disponibilité moyenne des différentes fonctions au cours de la mission.

Ayant été initialisé (troisième station de travail et centre de secours à l'état OFF), le modèle permet de simuler le centre de mission en pas à pas ou durant toute sa vie utile. Cette dernière peut être rejouée un grand nombre de fois afin d'obtenir des estimations statistiques éventuellement encadrées par un intervalle de confiance.

Outre l'exponentielle, des lois de probabilité diverses peuvent être considérées en faisant l'hypothèse markovienne ou pas (une loi de Weibull pour la durée de bon fonctionnement des antennes ou une loi lognormale pour le temps de réparation par exemple). Dans le cas non markovien, des lignes supplémentaires sont ajoutées dans le simulateur afin de mémoriser les durées correspondantes qui sont décrémentées à l'occurrence de chaque événement jusqu'à leur prise en compte effective. L'outil permet également de générer des Blocs Diagramme de Fiabilité (BDF) animés par la simulation au pas à pas ou sous forme d'images.

L'utilisateur peut compléter le modèle de simulation d'architecture qui a été généré, soit pour obtenir un résultat particulier tel que le niveau de production d'images dans notre exemple, soit pour le coupler avec un autre modèle tel qu'un modèle d'orbitographie afin de considérer l'effet réel des dysfonctionnements selon la position des satellites.

#### 4 Couplage entre outil de simulation et d'optimisation

Malgré son intérêt dans de nombreux domaines d'ingénierie, le couplage entre optimisation et simulation stochastique, qui consiste à rechercher une configuration optimale de paramètres d'un système à partir des résultats d'une fonction d'évaluation traitée par simulation de Monte-Carlo, s'avère encore confidentiel, car très pénalisant en terme de durée de traitement. En première approximation, le nombre de cas de simulation à réaliser est, en effet, égal au nombre d'évaluations nécessaires à l'optimisation pour assurer la convergence, multiplié par le nombre de cas de simulation requis par la précision recherchée pour chacune des évaluations (soit environ  $2000 * 2000 = 4$  millions pour une application typique). Toutefois cette durée peut être sensiblement diminuée par le choix d'une stratégie consistant à faire varier la précision de l'évaluation de chacune des solutions candidates (de 100 à 2000 simulations par exemple), en fonction des résultats d'une évaluation grossière menée préalablement (à 100 simulations par exemple).

Afin que chacune des solutions évaluées soit soumise au même risque de rejet inopportun, la condition de la formule 1 doit être respectée entre les valeurs  $N_i$  et  $N_j$  du nombre de simulations à réaliser pour évaluer deux candidats  $i$  et  $j$ , en fonction de la moyenne et de la variance des résultats obtenus à l'issue de l'évaluation grossière menée à  $N_0$  simulations. Cette condition résulte du théorème central limite.

$$N_i/N_j = [(M-mj_0) * \sigma_i / (M-mi_0) * \sigma_j]^2 \quad [1]$$

Trouvée dans la littérature scientifique [3], une technique de couplage dite optimale, l'algorithme OCBA (Optimal Computing Budget Allocation), applique cette condition pour rechercher une valeur optimale parmi un nombre fini  $p$  de candidats. A chaque itération  $k$ , celui-ci autorise  $n$  nouvelles simulations distribuées selon les ratios indiqués en figure 8, avec  $\hat{i}$  la meilleure solution courante trouvée durant l'itération  $k-1$ ;  $J_i$  (moyenne) et  $\sigma_i$  (écart type) résultant de l'évaluation de  $i$ .

$$\frac{N_{\hat{i}}}{N_i} = \sigma_i \sqrt{\sum_{j=1, j \neq \hat{i}}^p \frac{1}{\sigma_j^2} \rho_{ij}^2} \quad i \neq \hat{i}$$

$$\rho_{ij} = \left( \frac{\sigma_j / \Delta_j}{\sigma_i / \Delta_i} \right)^2 \quad i, j \in 1, 2, \dots, p \quad i, j \neq \hat{i} \quad \Delta_i = J_{\hat{i}} - J_i$$

Figure 8. Algorithme OCBA

Ce principe a pu être adapté aux Algorithmes Génétiques, à l'évolution différentielle [5] et au Simplexe non linéaire (algorithme de Nelder Mead) sur l'outil GENCAB [4] de la société CAB INNOVATION, comme l'illustre la figure 9; cette hybridation de différentes techniques de recherche globale et locale ayant pour finalité de rendre l'outil robuste à la diversité des problématiques rencontrées.

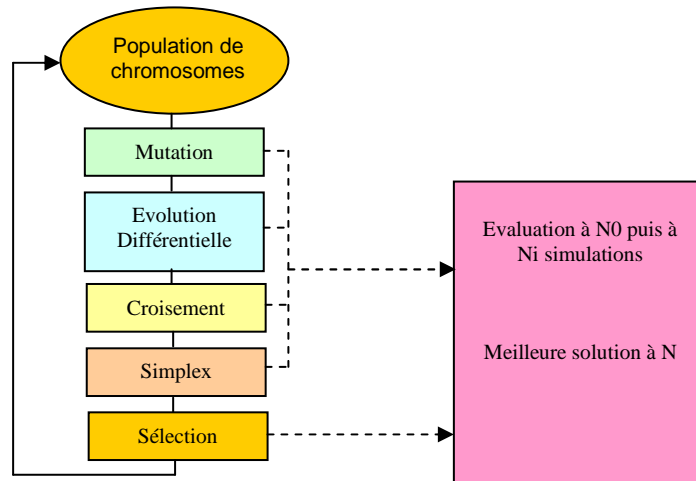


Figure 9. Couplage optimisation / simulation

- Le nombre de simulations réalisées au cours de l'évaluation grossière  $N_0$  et celui nécessaire à la précision requise  $N$  étant définis a priori par l'utilisateur, la population initiale de chromosomes (solutions potentielles) est d'abord évaluée à  $N_0$ , puis la meilleure solution parmi celle-ci (en valeur moyenne) est réévaluée à  $N$  (par ajout de  $N-N_0$  simulations).
- Au cours des différentes boucles de traitement, chaque candidat  $i$  résultant d'une mutation, d'une évolution différentielle, d'un croisement ou d'une recherche locale (simplexe) est évalué à  $N_0$  puis réévalué à la valeur  $N_i$  obtenue par application de l'algorithme OCBA limité à la valeur  $N$  (la réévaluation n'est effective que si  $N_i > N_0$ ).
- La sommation utilisée par l'algorithme OCBA dans le calcul des ratios est mise à jour à chaque évaluation, afin de ne pas devoir réévaluer ultérieurement les anciens candidats (non tous mémorisés), et est réinitialisée à l'émergence de toute meilleure solution qui devient alors la solution optimale courante.

Cette technique de couplage a déjà été utilisée avec différents modèles de simulation récursive et se révèle d'autant plus efficace que la précision requise est élevée. Elle permet ainsi de diminuer les temps de calcul dans un rapport 30 environ dans le cas d'optimisation basée sur des évaluations à 2000 simulations réalisées selon le résultat d'évaluations grossières à 100 simulations.

## 5 Validation à partir de résultats de simulation

L'approche probabiliste impose de valider les dimensionnements à partir de résultats de simulation. Mais comment maîtriser les incertitudes dont les origines sont multiples telles que la méconnaissance des phénomènes physiques, les limitations et la représentativité des données expérimentales, les dispersions et corrélations éventuelles des données d'entrée, la faiblesse des modèles numériques, etc. ? Si nous laissons volontiers la problématique de la justesse des modèles et de leur recalage aux experts des différents métiers, différentes réponses ont été apportées à celle relative à la dispersion des données. Cette dernière concerne, en général, l'estimation d'un quantile, soit la probabilité de dépasser un seuil minimal de performance avec un certain niveau de confiance, à partir d'un échantillon de résultats de simulation. Mais la taille de cet échantillon est limitée par la complexité de la simulation qui peut nécessiter plusieurs heures de calcul pour aboutir à un résultat (en mécanique notamment).

### 5.1 Méthode de Wilks

Datant de plus d'un demi-siècle la méthode de Wilks [1] est traditionnellement utilisée en thermo-hydraulique nucléaire pour estimer un quantile. Cette méthode non paramétrique est conservatrice car elle ne fait aucune hypothèse sur les dispersions. Résultant de l'expression de l'intervalle de confiance d'une loi binomiale, la formule de Wilks (2) permet de déterminer le nombre minimum  $N$  de simulations nécessaires à l'obtention d'un majorant de la valeur du quantile  $T_{\alpha, \beta}$ , pour lequel  $\alpha$  est la probabilité de non-dépassement et  $\beta$  le niveau de confiance.

$$1 - \sum_{N-r+1}^N C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{N-i} \geq \beta \quad [2]$$

$r$  est le rang des pires cas obtenus durant toutes les simulations. Ainsi l'estimation du quantile  $T_{95,95}$  est donnée par la valeur pire cas ( $r = 1$ ) obtenue au cours d'un nombre de simulations calculé de la manière suivante :

$$1 - \alpha N \geq \beta \text{ soit } \alpha N \leq \beta - 1 \text{ ou } N \geq \ln(\beta - 1) / \ln(\alpha) \quad N \geq \ln(0,05) / \ln(0,95) = 58,40 \text{ soit } N \geq 59$$

Ce même quantile  $T_{95,95}$  peut être estimé par la pire des valeurs obtenue à l'exclusion du pire cas ( $r = 2$ ) :

$$1 - (N - \alpha N) \alpha \geq \beta \text{ soit } N \geq 93$$

ou par la pire des valeurs obtenue à l'exclusion des 2 valeurs pires cas ( $r = 3$ ) soit  $N \geq 124$ .

### 5.2 Méthode du bootstrap

Proposé à la fin des années 70 par Bradley Efron [2], le bootstrap est une méthode de sur-échantillonnage qui cherche à améliorer les estimations statistiques. A partir d'un échantillon original, elle consiste à générer un grand nombre d'échantillons fictifs, par tirage aléatoire avec remise, sans recourir à de nouvelles observations. L'objectif est de mieux exploiter l'information contenue dans l'échantillon original même si aucune information nouvelle n'est ainsi créée.

<i>Echantillon original :</i>	2 5 7 8 9	<i>Moyenne</i>	6,2	<i>Quantile</i>	X
	↓				
<i>Echantillons</i>	2 2 7 9 9		5,8		X
<i>générés par</i>	5 8 8 9 9		7,8		X
<i>Bootstrap</i>	2 5 7 8 8		6		X
		<i>Moyenne :</i>	6,53		X
		<i>Erreur standard (écart-type) :</i>	1,10		X
		<i>Intervalle de confiance :</i>	X X		X X
		<i>(théorème central-limite)</i>			

Figure 10. Estimation par bootstrap

A partir d'un échantillon original, une famille d'échantillons est créée par bootstrap sur laquelle on effectue des estimations de paramètres divers comme s'il s'agissait d'autant d'échantillons tirés de la population mère. Ainsi dans l'exemple de la figure 10, la moyenne de la population est estimée par la moyenne des valeurs moyennes obtenues sur chacun des échantillons générés par bootstrap et l'écart-type calculé sur ces mêmes valeurs donne une estimation de ce qui est appelé l'erreur standard du paramètre étudié. On procède de la même manière pour estimer un quantile, sa moyenne et l'erreur standard correspondante. En faisant l'hypothèse que la distribution des paramètres est approximativement normale, pour l'ensemble des échantillons générés par bootstrap, on peut définir un pseudo intervalle de confiance à partir de la moyenne et de l'erreur standard, pour chacun des paramètres, par application du théorème central-limite.

Mais malgré son indéniable succès dans la communauté scientifique, nous interrogeons sur la validité même de cette méthode d'estimation que nous avons précédemment cherché à évaluer [4]. Aussi, nous ne pouvons que déconseiller son utilisation bien que son pseudo intervalle de confiance puisse être resserré, à loisir, en augmentant le nombre d'échantillons générés par tirage aléatoire. En effet, les estimations obtenues s'avèrent, à nos yeux, quelque peu fictives car elles ne portent pas sur la population mère mais sur une population virtuelle générée à partir d'un échantillon.



## **Conclusion**

L'approche probabiliste nous semble incontournable au dimensionnement de systèmes d'une certaine complexité afin de maîtriser les incertitudes et éviter l'empilement de marges cachées. A partir d'une vision figée du besoin de l'utilisateur, l'approche déterministe génère, en effet, des surdimensionnements multiples souvent amplifiés par des effets de seuil. Mais elle conduit aussi à des sous-dimensionnements cachés par de pseudo coefficients de sécurité qui masquent la méconnaissance de certains phénomènes et les dispersions associées. Ainsi dans une finalité de satisfaction du client et d'efficacité économique, peut-on s'interroger sur le meilleur service rendu par un type de solution (un équipement existant, une classe de satellite ou de lanceur dans le domaine spatial par exemple) plutôt que sur la solution, à définir, répondant à un certain besoin.

Fondée sur la simulation, l'approche probabiliste doit être validée par l'estimation de quantiles, tels que celui concernant la durée maximale d'indisponibilité cumulée au cours d'une mission, pour laquelle nous préconisons la méthode de Wilks. Bien que conservatrice et donc pénalisante pour l'industriel, elle nous semble, en effet, plus appropriée que celle du Bootstrap dont les hypothèses sous-jacentes apparaissent discutables et qui conduit parfois à des résultats très optimistes.

Se présentant comme une alternative à d'autres techniques de modélisation, les modèles de simulation récursive permettent d'évaluer des systèmes à états discrets hybrides, impliquant des phénomènes aléatoires et continus, représentatifs d'une grande partie des systèmes réels observés sur le terrain.

Bénéficiant d'un outil de génération automatique à partir d'une définition des caractéristiques de l'architecture du système, ces modèles peuvent se coupler directement à des outils d'optimisation sans conduire à des durées de traitement rédhibitoires. Ils ont déjà été utilisés pour résoudre des problématiques complexes du domaine spatial.

## **Références**

- [1] WILKS, S. S., « Determination of Sample Sizes for Setting Tolerance Limits », The Annals of Mathematical Statistics, Vol.12, pp. 91-96, 1941.
- [2] EFRON, B., TIBSHIRANI, R. J., An Introduction to the bootstrap, Chapman and Hall, 1993.
- [3] Chen C. H., Lin J., Yucesan E., and Chick S. E., Simulation budget allocation for further enhancing the efficiency of ordinal optimization. Journal of Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Application, 10(3):251-270, 2000.
- [4] CABARBAYE, A, Outil générique d'optimisation dans le domaine discret et/ou continu éventuellement stochastique - ROADEF'03 – Avignon, 2003.
- [5] Feoktistov V., Janaqi S., Evolution différentielle - Une vue d'ensemble, MOSIM 04, NANTES, 2004.
- [6] CABARBAYE, A., FAURE, J., Faut-il rejeter le Bootstrap ?, Qualita, Besançon 2009.
- [7] CABARBAYE, A., LAULHERET, R., Modèle de simulation récursive et optimisation, 41èmes Journées de Statistique, Bordeaux, 2009.