

## **MODELES GENERIQUES DE REDONDANCE M PARMIS N AVEC STOCK DE RECHANGES S**

**Roland LAULHERET, Bruno LACOSTA**

Centre National d’Etudes Spatiales (CNES)  
18 avenue Edouard Belin  
31401 Toulouse Cedex 4

Tél. 05 61 27 47 19 / 05 61 27 30 68

Mél : Roland.laulheret@cnes.fr / Bruno.Lacosta@cnes.fr

**André CABARBAYE**

CAB INNOVATION  
3, rue de la Coquille  
31500 Toulouse

Tél. 05 61 54 68 08

Mél : Andre.Cabarbaye@cabinnovation.fr

Web : www.cabinnovation.fr

**RESUME :** *Cet article présente un modèle markovien très générique de redondance M parmi N avec stock de rechanges S, qui a été développé pour évaluer la disponibilité de moyens au sol de systèmes spatiaux (station de réception, centre de contrôle ou d’exploitation, réseau de télécommunications...). Associé à un arbre de causes, ce modèle permet une évaluation de la disponibilité de systèmes complexes dans un temps suffisamment court, par rapport à de la simulation de type Monte-Carlo, pour autoriser un couplage direct avec un outil d’optimisation (Algorithmes Génétiques et algorithme de Nelder Mead), et automatiser ainsi la recherche de la configuration optimale d’architecture de système. Un exemple réel d’application est fourni dans l’article.*

**SUMMARY :** *This article presents a very generic Markovian model of redundancy M among N with stock of spare S, which was developed to evaluate the availability of ground space systems (station of reception, centers of control or exploitation, telecommunications network). Associated with a fault tree, this model allows an evaluation of the availability of complex systems in a sufficiently short time, compared to Monte-Carlo simulation, to authorize a direct coupling with a optimisation tool (Genetic Algorithms and algorithm of Nelder Mead), and to thus automate the research of the optimal architecture configuration of system. A real example of application is provided in the article.*

**MOTS-CLES :** *Modélisation, Optimisation, Disponibilité, Markov, Arbre de causes, Monte-Carlo,*

### **1. INTRODUCTION**

L’optimisation de l’architecture, de la mise en oeuvre et de la maintenance des systèmes, en regard de la disponibilité du service rendu à l’utilisateur, recouvre des enjeux souvent considérables. Suivant la problématique rencontrée, l’objectif recherché peut consister à minimiser le coût global de possession (acquisition, exploitation, maintenance...) tout en respectant un objectif de disponibilité, maximiser la disponibilité dans une enveloppe de coût donnée ou respecter un critère élaboré à partir de ces différents paramètres.

Cette optimisation résulte de choix multiples portant notamment sur :

- la répartition des fonctions du système dans des constituants de diverses natures,
- la fiabilité des constituants qui dépend des technologies mises en oeuvre et de la qualité des composants utilisés,
- les taux d’utilisation des matériels ( $T_{ON} / T_{ON} + T_{OFF}$ )
- les redondances éventuelles et les caractéristiques de celles-ci,
- l’existence de modes de fonctionnement dégradés,
- la durée des reconfigurations des matériels en cas de panne,

et pour les éléments réparables :

- la durée des réparations sur site ou via un retour en usine,
- l’utilisation éventuelle et le dimensionnement de lots de rechange sur site,
- etc.

Mais dans un contexte industriel, cette optimisation est fortement contrainte en termes de durée d’analyse et de justesse des résultats attendus. D’une part, elle s’inscrit le plus souvent dans le cadre d’une activité d’ingénierie concourante ou de réponse à appel d’offres. D’autre part, les entreprises sont de plus en plus directement concernées par le bon fonctionnement de leurs produits en exploitation par le jeu de mécanismes contractuels d’intéressement ou de pénalité.

C’est dans un tel cadre que le Centre National d’Etudes Spatiales est confronté à une problématique d’optimisation de ses moyens au sol (station de réception, centre de contrôle ou d’exploitation, réseau de télécommunications...) qui sont des systèmes réparables (contrairement aux satellites) et reconfigurables (par l’utilisation de redondances ou le passage dans des modes dégradés).

Bien que ces systèmes soient très diversifiés et que leur fonctionnement se révèle particulièrement complexes,

l'analyse sur le terrain a montré qu'ils pouvaient, dans la grande majorité des cas, se décomposer en sous-ensembles génériques de type « redondance M parmi N avec Stock de rechanges S » assemblés entre eux pour constituer une architecture de système.

Aussi, cette communication présente les méthodes et outils de modélisation et de traitement choisis pour optimiser ces systèmes de manière efficace.

## 2. FORMULATION DU PROBLEME

Le problème à résoudre porte donc sur la modélisation et l'optimisation de systèmes réparables très variés, constituées de sous-ensembles en redondance avec stock de rechanges.

Ce type de redondance est très générique et peut être illustré par la figure 1.

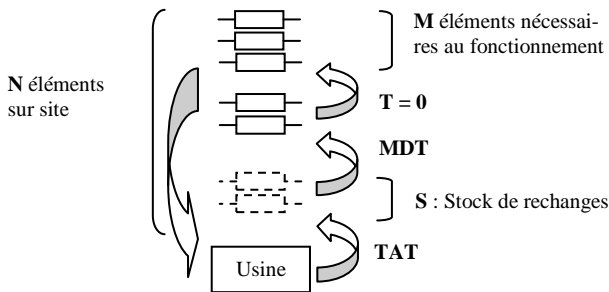


Figure 1. Redondance M parmi N avec stock de rechanges S

Dans cette configuration de redondance, M éléments sont nécessaires au fonctionnement du sous-ensemble et N-M éléments supplémentaires constituent soit des éléments en redondance active ou passive, mais activés alors dans un délai suffisamment bref pour ne pas avoir d'incidence significative sur le fonctionnement du sous-ensemble, soit des éléments de rechange disponibles sur site en nombre S, dont l'utilisation conduit à une indisponibilité de relativement courte durée (MDT : Mean Down Time) ; la remise en état des divers éléments nécessitant un temps beaucoup plus long (TAT : Turn Around Time).

Ces éléments peuvent être caractérisés par un taux de défaillance à l'état ON ( $\lambda$ ) et à l'état OFF ( $\lambda_{OFF}$ ) et/ou une probabilité d'échec à la sollicitation ( $\gamma$ ).

Les divers sous-ensembles sont assemblés entre eux pour constituer des architectures de systèmes. Ils sont indépendants entre eux mais peuvent appartenir à différentes coupes minimales (combinaisons de sous-ensembles nécessaires à la mission) comme l'illustre la figure 2.

Les dépendances entre sous-ensembles, faisant en sorte que les caractéristiques stochastiques (taux de défaillance, durée de réparation...) des uns soient modifiées par l'état courant des autres (opérationnel ou non), se révèlent, en effet, relativement rares sur le terrain. Ils peuvent

être toutefois traités de manière pessimiste en considérant des hypothèses majorantes.

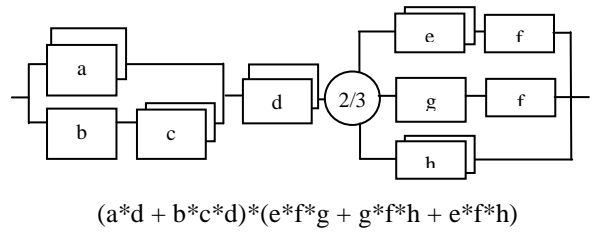


Figure 2. Exemple d'architecture de systèmes

## 3. CADRE METHODOLOGIQUE :

Sur le plan méthodologique, deux critères sont à retenir pour traiter ce type de problématique :

- la modélisation doit être accessible à des concepteurs non-spécialisés,
- la modélisation, l'évaluation et l'optimisation doivent pouvoir s'effectuer dans un délai relativement court (quelques jours au maximum).

La durée d'évaluation doit être notamment compatible avec la recherche d'une configuration optimale d'architecture de système. Cette optimisation peut s'opérer par des analyses de sensibilité menées individuellement sur chacun des paramètres d'ajustement du système (types de redondance, stock de rechanges, contrat de maintenance, etc.). Mais celles-ci montrent vite leurs limites quand les variables sont nombreuses et les optima multiples. Il devient alors nécessaire de coupler l'évaluation à des techniques d'optimisation automatisées.

Dans ce schéma, la simulation de Monte-Carlo conduit à des durées souvent rédhibitoires.

Les traitements markoviens présentent des avantages significatifs, en termes de temps de calcul et de précision, par rapport aux techniques de simulation, même s'ils sont limités par l'explosion combinatoire. Cependant la modélisation sous forme de graphe de Markov est relativement complexe et ne peut être réellement mise en œuvre que par des spécialistes.

La modélisation par arbre d'événements est particulièrement simple et conduit à des traitements analytiques rapides. Mais elle présente un caractère statique incompatible avec la prise en compte d'une certaine complexité (notamment les dépendances stochastiques internes aux sous-ensembles).

## 4. METHODES UTILISEES

Supporté par l'outil SUPERCAB [7] de la société CAB INNOVATION, un modèle markovien générique a été développé pour évaluer les redondances M parmi N avec Stock de rechanges S.

A partir d'une fonction paramétrique saisie dans une cellule de tableur, ce modèle est automatiquement généré puis traité par l'outil afin de renvoyer le résultat de disponibilité ou de fiabilité correspondant, directement dans cette même cellule.

Ce modèle peut aisément se coupler à un outil d'arbre de causes pour modéliser des systèmes à partir de leurs sous-ensembles (la probabilité de chaque événement de base de l'arbre étant définie par une cellule du tableur).

L'évaluation de disponibilité du système complet peut alors être couplée à un outil d'optimisation, pour automatiser la recherche d'une configuration optimale d'architecture, ou à un outil de simulation, pour appréhender la variabilité des résultats obtenus en fonction de la dispersion des variables d'entrée.

#### 4.1. Modèles de redondance M parmi N avec Stock de rechanges S

Ce modèle, qui a été conçu de la manière la plus générique possible, permet d'obtenir la disponibilité ou la fiabilité, asymptotique ou transitoire (à t ou l'infini), d'un sous-ensemble, à partir de la fonction paramétrique suivante saisie dans une cellule de tableur :

#### REDONDANCE\_GLOBALE (M; N; λ; λ<sub>OFF</sub>; γ; T; T<sub>1</sub>; k<sub>1</sub>; Type<sub>1</sub>; T<sub>s</sub>; k<sub>s</sub>; Type<sub>s</sub>; R; Na; Nb)

L'utilisateur peut considérer un taux de défaillance à l'état ON (λ) et à l'état OFF (λ<sub>OFF</sub>), une probabilité d'échec à la sollicitation (γ utilisé indifféremment avec λ<sub>OFF</sub> pour caractériser les éléments en redondance), une durée moyenne de reconfiguration pendant laquelle le système est indisponible (T<sub>s</sub>) et une durée moyenne de remise en état d'un élément après panne (T<sub>1</sub>) ; ces durées étant modélisées par des lois d'Erlang simple à k états fictifs avec k (k<sub>1</sub> ou k<sub>s</sub>) égal à 1 considéré par défaut (soit μ = 1 / T<sub>1</sub> et tr = 1 / T<sub>s</sub>).

Si le sous-ensemble n'est pas indisponible pendant les reconfigurations (T<sub>s</sub> = 0), la fonction génère la matrice de Markov de dimension N-M+2 de la figure 3.

Si le système est indisponible pendant les reconfigurations la fonction génère la matrice de Markov de dimension 2(N-M)+2 de la figure 4.

	1	2	3	4	...	N-M+1	N-M+2
Pas de panne : 1	-	$M\lambda(1-\gamma) + (N-M)\lambda^*$	$M\lambda\gamma(1-\gamma)$	$M\lambda\gamma^2(1-\gamma)$		$M\lambda\gamma^{N-M-1}(1-\gamma)$	$M\lambda\gamma^{N-M}$
Perte 1 élément : 2	$\mu_1$	-	$M\lambda(1-\gamma) + (N-M-1)\lambda^*$	$M\lambda\gamma(1-\gamma)$		$M\lambda\gamma^{N-M-2}(1-\gamma)$	$M\lambda\gamma^{N-M-1}$
Perte 2 éléments : 3	$\mu_1'$	$\mu_2$	-	$M\lambda(1-\gamma) + (N-M-2)\lambda^*$		$M\lambda\gamma^{N-M-3}(1-\gamma)$	$M\lambda\gamma^{N-M-2}$
Perte 3 éléments : 4	$\mu_1''$		$\mu_3$	-		$M\lambda\gamma^{N-M-4}(1-\gamma)$	$M\lambda\gamma^{N-M-3}$
...							
Perte N-M éléments : N-M+1	$\mu_1'$					-	$M\lambda$
Perte sous-ensemble : N-M+2	$\mu_1''$					$\mu_{N-M+1}$	-

Figure 3. Sous-ensemble disponible pendant les reconfigurations

	1	2	3	4	5	6	...	2(N-M)+2
Pas de panne : 1	-	$M\lambda$	$(N-M)\lambda^*$					
Reconfiguration : 2	$\mu_1'$	-	$tr(1-\gamma)$	$tr\gamma + (M-1)\lambda + (N-M)\lambda^*$				
Perte 1 élément : 3	$\mu_1''$		-	$M\lambda$	$(N-M-1)\lambda^*$			
Reconfiguration : 4			$\mu_1'$	-	$tr(1-\gamma)$	$tr\gamma + (M-1)\lambda + (N-M-1)\lambda^*$		
Perte 2 éléments : 5			$\mu_1''$		-	$M\lambda$		
Reconfiguration : 6						-		
...								
Reconfiguration : 2(N-M)								$tr\gamma + (M-1)\lambda + \lambda^*$
Perte N-M éléments : 2(N-M)+1								$M\lambda$
Perte sous-ensemble : 2(N-M)+2								-

Figure 4. Sous-ensemble indisponible pendant les reconfigurations

Ces matrices définissent toutes les transitions possibles entre états. A titre d'exemple la transition de l'état 1 de la seconde matrice (absence de panne) vers l'état 2 (indisponible pendant la première reconfiguration) a pour taux  $M \times \lambda$  (perte de l'un des  $M$  éléments actifs) et celle allant directement vers l'état 3 (disponible avec perte de 1 élément) a un taux  $(N - M) \times \lambda^*$  (perte de l'un des  $N - M$  éléments en redondance).

La fonction peut renvoyer une valeur de fiabilité en considérant le dernier état comme absorbant ( $R = \text{vrai}$  entraîne  $\mu_{N-M+1}$  et  $\mu_l'' = 0$ ). Différentes politiques de maintenance peuvent être considérées avec 1 ou  $n$  réparateurs, ou un temps de remise en état du sous-ensemble complet indépendant du nombre d'éléments à réparer.

- Type\_1 = 1 : 1 réparateur ( $\mu_i = \mu_l$ ,  $\mu_l' = \mu_l'' = 0$ )
- Type\_1 = 2 :  $n$  réparateurs ( $\mu_i = i * \mu_l$ ,  $\mu_l' = \mu_l'' = 0$ )
- Type\_1 = 3 : temps indépendant des réparations ( $\mu_i = 0$ ,  $\mu_l' = \mu_l$ ,  $\mu_l'' = \mu_l$  si  $R = \text{Faux}$ )

La remise en état peut commencer au début ou au terme de la reconfiguration ( $\mu_i' = \mu_i$  si  $\text{Type}_s = \text{Vrai}$  ou égal à 0 dans le cas contraire,  $\mu_i$  étant défini par  $\text{Type}_1$ ).

Le paramètre Nb permet de traiter les redondances de type  $M$  parmi  $N$  dont  $S$  éléments constituent un stock de

rechanges. Le sous-ensemble est disponible durant les  $Nb = N-M-S$  premières reconfigurations mais est indisponible durant les suivantes. Le paramètre Na permet d'évaluer la probabilité de l'état de rang Na.

Remarque : Comme dans la plupart des modèles de disponibilité [1] & [2], cette modélisation est légèrement pessimiste dans la mesure où, en cas de pannes multiples, les durées de réparation considérées ne tiennent pas compte des réparations déjà entamées.

#### 4.2 – Modélisation du système complet

Le couplage entre le modèle markovien générique de redondance et l'outil d'arbres de causes (CABTREE [7]), utilisé pour décrire le fonctionnement du système à partir de celui de ses sous-ensembles, est illustré par l'exemple de la figure 5.

La probabilité de chaque événement de base de l'arbre est définie par une cellule du tableur dans laquelle peut être saisie une formule de redondance de type «  $M$  parmi  $N$  avec stock  $S$  ».

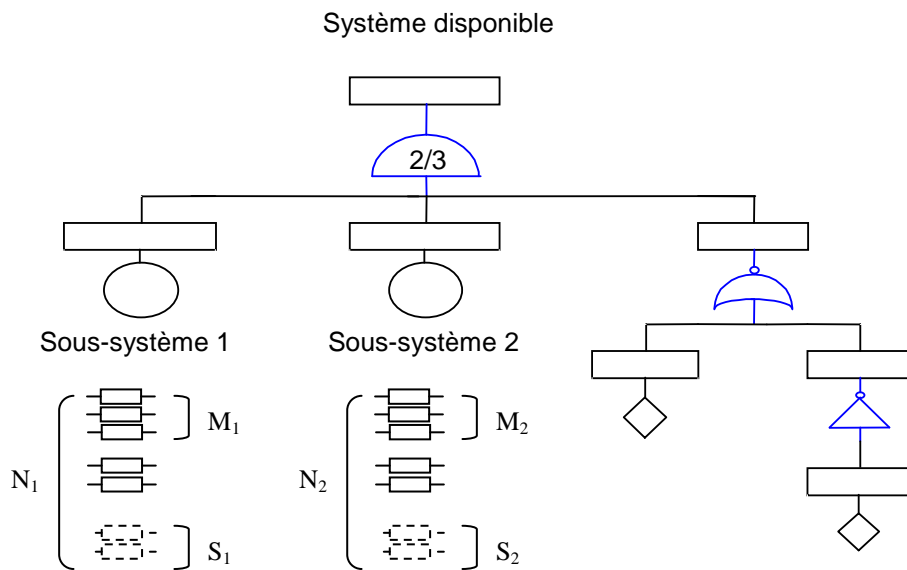


Figure 5. Exemple de couplage entre arbre de causes et modèles markoviens génériques

#### 4.3. Optimisation et analyse de dispersion

Le couplage entre outils d'évaluation et d'optimisation permet d'automatiser la recherche de l'architecture la plus performante selon un critère donné. Basé sur une méthode hybride associant Algorithmes Génétiques et Simplexe non linéaire (algorithme de Nelder Mead),

l'outil GEN CAB [5] permet un tel couplage comme l'illustre la figure 6.

L'outil recherche la configuration optimale de paramètres (de l'ordre de 25 paramètres différents de type binaire, entier ou réel) qui maximise ou minimise le résultat de la fonction d'évaluation, tout en satisfaisant des contraintes ( de type  $A \geq B$ ).

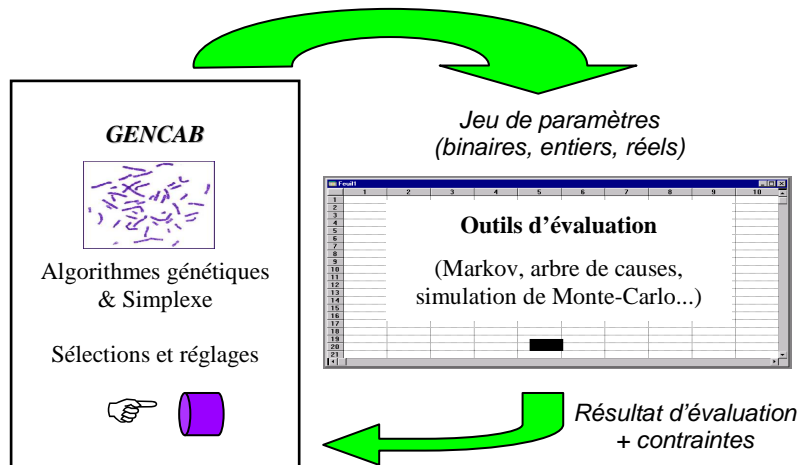


Figure 6. Couplage entre outils d'évaluation et d'optimisation

Par ailleurs, si la durée d'une simulation de type Monte-Carlo rend délicat son couplage avec un outil d'optimisation (le nombre de pas de simulation de chaque évaluation étant multiplié par le nombre de pas d'optimisation, en première approximation), le couplage entre simulation et évaluation permet d'appréhender la variabilité des résultats de l'évaluation en fonction de la

dispersion des variables d'entrée (les taux de défaillance et les durées de réparation par exemple). Cette possibilité de couplage est notamment mise en oeuvre par l'outil SIMCAB [6] qui permet de faire varier les paramètres d'un tableur suivant diverses lois de probabilités (une vingtaine environ) comme l'illustre la figure 7.

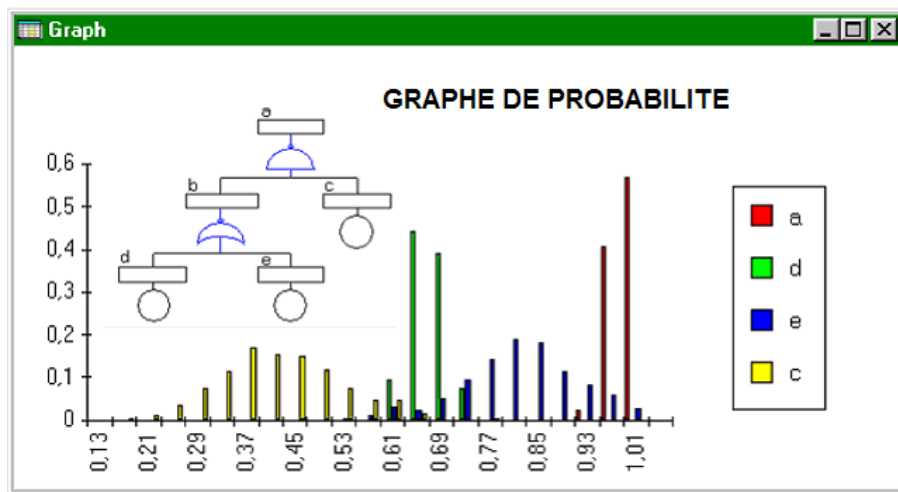


Figure 7. Variation des résultats d'évaluation en fonction de la dispersion des entrées

## 5. EXEMPLE D'APPLICATION

A titre d'exemple la figure 8 montre comment les lots de rechange d'une station de réception TM/TC peuvent être optimisés en respectant une contrainte de disponibilité qui peut être relâchée après négociation (0,98 → 0,97).

Toutefois, pour respecter des clauses de confidentialité, toutes les données réelles ont été modifiées dans l'exemple présenté.

ELEMENTS	MTTF ON (heure)	Nb	Type de redondance	Stock	Coût unitaire (Euros)	MDT (heure)	TAT (heure)	Disponibilité Opérationnelle	Coût (Euros)
Moteur az/el	100000	2	Série	2	4500	28	2400	0,9993	18000
Codeurs	100000	2	Série	2	1500	28	2400	0,9993	6000
Butées	1000000	4	Série	1	500	28	2400	0,9998	2500
ACU	40000	1	Série	1	6500	26	1368	0,9981	13000
Calculateur pilotage	31150	1	Passive 1/2	1	4000	25	1368	0,9999	12000
LNA voie PCG ou PCD	100000	2	Série	2	3500	27	3120	0,9992	14000
Down convertir voie PCG ou PCD	60000	2	Série	2	2500	26	2256	0,9987	10000
Up convertir	100000	1	Série	1	2000	26	2376	0,9991	4000
HPA	20000	1	Série	2	5000	27	1368	0,9983	15000
Modulateur PM -TC	8000	1	Série	3	3500	26	1200	0,9961	14000
Modulateur PM/PSK-TC	50000	1	Série	1	3500	26	1200	0,9989	7000
Calculateur SEBB	16013	1	Passive 1/2	1	3000	27	1368	0,9991	9000
Récepteur DRR70	33300	1	Série	1	8000	26	1200	0,9979	16000
Time link 1	35000	1	Série	1	4500	26	1248	0,9979	9000
Routeur	50000	1	Série	1	1500	26	1080	0,9990	3000
Coffret électrique	50000	1	Série	2	1000	26	432	0,9995	3000
\$	STATION TTC :							0,9802	155500

Objectif 0,98

ELEMENTS	MTTF ON (heure)	Nb	Type de redondance	Stock	Coût unitaire (Euros)	MDT (heure)	TAT (heure)	Disponibilité Opérationnelle	Coût (Euros)
Moteur az/el	100000	2	Série	1	4500	28	2400	0,9972	13500
Codeurs	100000	2	Série	1	1500	28	2400	0,9972	4500
Butées	1000000	4	Série	1	500	28	2400	0,9998	2500
ACU	40000	1	Série	1	6500	26	1368	0,9981	13000
Calculateur pilotage	31150	1	Passive 1/2	0	4000	25	1368	0,9980	8000
LNA voie PCG ou PCD	100000	2	Série	1	3500	27	3120	0,9957	10500
Down convertir voie PCG ou PCD	60000	2	Série	2	2500	26	2256	0,9987	10000
Up convertir	100000	1	Série	1	2000	26	2376	0,9991	4000
HPA	20000	1	Série	2	5000	27	1368	0,9983	15000
Modulateur PM -TC	8000	1	Série	3	3500	26	1200	0,9961	14000
Modulateur PM/PSK-TC	50000	1	Série	1	3500	26	1200	0,9989	7000
Calculateur SEBB	16013	1	Passive 1/2	1	3000	27	1368	0,9991	9000
Récepteur DRR70	33300	1	Série	1	8000	26	1200	0,9979	16000
Time link 1	35000	1	Série	1	4500	26	1248	0,9979	9000
Routeur	50000	1	Série	1	1500	26	1080	0,9990	3000
Coffret électrique	50000	1	Série	1	1000	26	432	0,9994	2000
\$	STATION TTC :							0,9706	141000

Objectif : 0,97

Figure 8. Exemple d'optimisation de lots de rechange

Les nombres d'éléments différents du stock (16 paramètres) sont automatiquement calculés (en une minute environ par un Pentium 4) en minimisant le coût global du système tout en respectant la contrainte de disponibilité ; celle-ci étant calculée pour des sous-ensembles en série, dans cet exemple, au moyen de la formule de redondance.

Outre le dimensionnement des lots de rechange, dont l'impact sur le coût global du système est immédiat, l'optimisation aurait également pu porter, dans cet exemple, sur les taux de défaillance, les durées de réparation ou les niveaux de redondance, dans la mesure où les modèles de coût correspondants étaient disponibles.

Une simulation couplée à l'évaluation permet de montrer la variabilité de la disponibilité obtenue en fonction de la dispersion des taux de défaillance (voir figure 9). Tous les taux ont été modélisés, dans cet exemple, par des lois uniformes avec une incertitude de + ou - 50%.

ce qui apparaît beaucoup plus réaliste que des valeurs fixes pour rendre compte de données issues de statistiques.

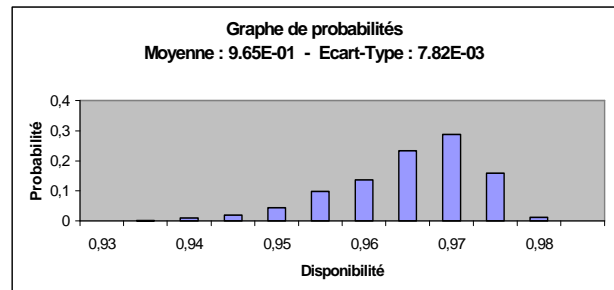


Figure 9. Distribution de la disponibilité

## CONCLUSION

L'évaluation de disponibilité ne s'inscrit plus aujourd'hui dans un cadre de simple vérification de performance mais participe activement à la construction et à l'optimisation des systèmes qui doivent répondre à des exigences émises par des donneurs d'ordres de plus en plus soucieux de la qualité du service offert à l'utilisateur, au meilleur coût.

Aussi doit-elle pouvoir s'inscrire dans une activité d'ingénierie concourante tant en termes de performance et de délai que de validation auprès des différents acteurs de la conception.

Le modèle markovien de redondance M parmi N avec stock de rechanges S proposé dans cet article et les outils qui lui sont associés tentent de répondre à cet enjeu en simplifiant et standardisant les analyses et en automatisant la recherche d'une configuration optimale d'architecture de système.

Déjà utilisé pour des applications spatiales, notamment pour le dimensionnement de nouveaux systèmes d'observation de la terre, leur domaine d'application apparaît très large, même si le manque de modèles paramétriques de coût et la difficulté à obtenir des données opérationnelles pertinentes devraient freiner leur diffusion.

Un prolongement à cette étude est envisagé pour tenter de traiter des redondances avec stocks de rechange partagés entre différents sous-systèmes, que l'on rencontre parfois sur le terrain. L'explosion combinatoire des états et le risque de perdre en généralité rendent toutefois cette recherche particulièrement difficile.

## **REFERENCES :**

- [1] A. Pages & M. Gondran - *Fiabilité des systèmes* - Edition Eyrolles, Paris 1980
- [2] A. Villemeur - *Sûreté de Fonctionnement des systèmes industriels* - Edition Eyrolles, Paris 1987
- [3] David E. Goldberg, *Algorithmes Génétiques, Exploration optimisation et apprentissage automatique*, Addison-Wesley, 1994.
- [4] J-M. Renders, *Algorithmes génétiques et réseaux de neurone*, Hermes, 1995
- [5] A. Cabarbaye – *Outil générique d'optimisation par Algorithmes Génétiques et Simplexe* - 8 èmes Journées Nationales du groupe Mode (Mathématique de l'Optimisation et de la Décision) de la SMAI, Toulouse 23 - 25 mars 2000.
- [6] A. Cabarbaye - *SIMCAB : Un outil générique de Simulation sous Microsoft Excel®* - 3e Conférence Fran-

cophone de Modélisation et Simulation (MOSIM'01), Troyes 25 au 27 avril 2001.

[7] A. Cabarbaye - *SUPERCAB PRO : Un atelier d'Ingénierie Système sous Microsoft Excel®* - 2<sup>ème</sup> Conférence Annuelle d'Ingénierie Système, organisée par l'AFIS, TOULOUSE, 26-28 juin 2001.