TP SdF N° 12

Estimations de fiabilité

Ce TP a pour objet d'élaborer des estimateurs de fiabilité à partir de données statistiques.

1. Rappeler les caractéristiques d'un estimateur et la notion d'intervalle de confiance.

2. Estimer les paramètres des lois suivantes :

Etablir les intervalles de confiance bilatéraux et unilatéraux à 60 et 90 %.

2.1 Loi Normale :

Evaluer la durée moyenne de réparation d'un équipement à partir de l'échantillon suivant : 58, 60, 61, 60, 58, 61, 61, 53, 62, 67, 59, 63, 48 heures.

Quelle sera la valeur considérée dans une étude de disponibilité si un taux de confiance à 60 ou 90 % est spécifié ?

2.2 Loi Exponentielle

10 équipements électroniques ont été soumis à un test accéléré à 50°C. L'un des équipements est tombé en panne à 2400 heures et les 9 autres ont fonctionné jusqu'à 5200 heures.

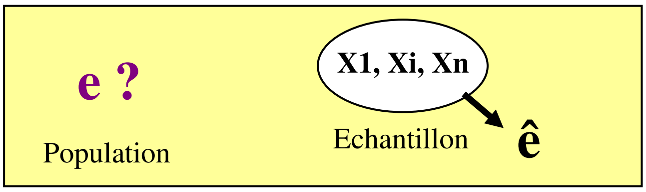
Estimer le taux de défaillance à 30°C.

2.3 Loi Binomiale

2 pièces ont été trouvées défectueuses dans un échantillon de 45 pièces. Estimer la probabilité qu'une pièce déjà montée sur un équipement issue du même lot soit défectueuse.

1. Caractéristiques d'un estimateur et notion d'intervalle de confiance

1.1 Estimateur :



Estimation ê d'un paramètre e caractéristique de la population à partir d'un échantillon {X1, Xi, Xn}

Convergent : ê → e n → ∞

Sans biais : Espérance(ê) = e si on choisi différents échantillons

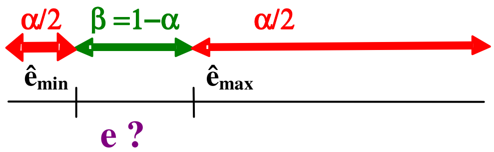
Efficace : Variance(ê) faible

Exemple : Estimateur de la moyenne = Σ Xi/n

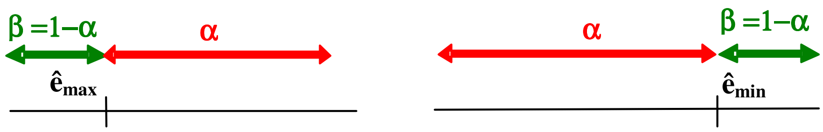
1.2 Intervalle de confiance :

Intervalle dans lequel le paramètre recherché e a une probabilité β (confiance) = 1- α (risque) de se trouver.

Intervalle bilatéral :



Intervalle unilatéral :



Borne supérieure Borne inférieure

2. Estimation de paramètres

2.1 Loi Normale :

Evaluation de la durée moyenne de réparation à partir de l'échantillon suivant : 58, 60, 61, 60, 58, 61, 61, 53, 62, 67, 59, 63, 48 heures.

Estimateur : m = Σ Xi/n = 59,3 heures

Pour la loi Normale, l'intervalle de confiance est définie par le théorème central limite :

$\boxed{m \pm \mathrm{U}_{1-\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}}$ pour un intervalle bilatéral et $\boxed{m \pm \mathrm{U}_{1-\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}}$ pour un intervalle unilatéral

dans lequel U_α est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, σ l'écart type de la population (écart type de l'échantillon * √[N/N-1] pour tenir compte du biais de cet estimateur) et N le nombre d'éléments de l'échantillon.

$\sigma_{\text{échantillon}} = 4{,}48$ N = 13 $\sigma_{\text{population}} = 4{,}66$ et la lecture de la table fournie en annexe donne les valeurs :

$U_{0,6} = 0{,}26$ $U_{0,8} = 8{,}5$ $U_{0,9} = 1{,}29$ $U_{0,95} = 1{,}65$.

Intervalle de confiance bilatéral à 60 % : 59,3 ± 0,85 * 4,46/√13 = 59,3 ± 1,1

à 90 % : 59,3 ± 1,65 * 4,66/√13 = 59,3 ± 2,1

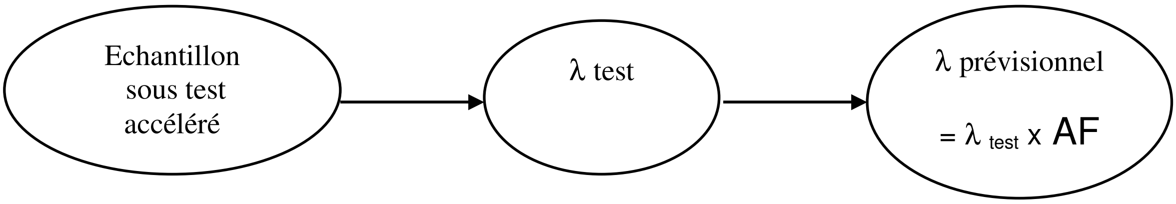
Intervalle de confiance unilatéral à 60 % : 59,3 ± 0,26 * 4,66/√13 = 59,3 ± 0,3

à 90 % : 59,3 ± 1,29 * 4,66/√13 = 59,3 ± 1,7

Pour une étude de disponibilité, on cherche un majorant de la durée moyenne de réparation, et donc la borne supérieure de l'intervalle de confiance unilatéral, soit 59,3 + 0,3 = 59.6 à 60% de confiance et 59.3 + 1,7 = 61 à 90%.

2.2 Loi Exponentielle

Un test accéléré consiste à accélérer l'apparition des modes de panne d'un équipement en amplifiant les contraintes environnementales. Le taux de défaillance est alors obtenu de la manière suivante :



Pour la température, un facteur d'accélération (AF) est défini par la loi d'Arrhenius pour des composant EEE.

10 équipements électroniques ont été soumis à un test accéléré à 50°C. L'un des équipements est tombé en panne à 2400 heures et les 9 autres ont fonctionné jusqu'à 5200 heures.

<u>Estimation de $\lambda_{50°C}$</u>

La durée moyenne de fonctionnement peut se calculer de la manière suivante :

MTTF = 1/λ = Durée cumulée de fonctionnement (T) / Nombre de défaillances (r) = (2400 + 9*5200)/1

MTTF = 49200 heures

L'intervalle de confiance est donné par la loi du KHI-2 :

Bilatéral : $\dfrac{2T}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r+2)} < MTTF < \dfrac{2T}{\chi^2_{\alpha/2}(2r)}$ Unilatéral : $\dfrac{2T}{\chi^2_{1-\alpha}(2r+2)} < MTTF$

Intervalle de confiance à 90 % :

Les valeurs : $\chi^2_{0,95}(4) = 9{,}49$ $\chi^2_{0,05}(2) = 0{,}1$ $\chi^2_{0,9}(4) = 7{,}78$ sont données par la table en annexe.

Bilatéral : 10368 < MTTF < 984000 1,016 E-06 < $\lambda_{50°C}$ < 96,433 E-06

Unilatéral : 12647 < MTTF $\lambda_{50°C}$ < 79,06 E-06

Intervalle de confiance à 60 % :

La table ne fournit pas les valeurs correspondantes de la fonction Khi-2. La fonction du tableur Excel "KHIDEUX.INVERSE(Probabilité ; Degré de liberté)" donne cependant ces valeurs (attention, l'argument « Probabilité » correspond au risque accepté et non plus au taux de confiance).

$\chi^2_{0,8}(4) = 5{,}98$ $\chi^2_{0,2}(2) = 0{,}45$ $\chi^2_{0,6}(4) = 4{,}04$

Bilatéral : 16454 < MTTF < 218666 4,573 E-06 < $\lambda_{50°C}$ < 60,772 E-06

Unilatéral : 24356 < MTTF $\lambda_{50°C}$ < 41,0575 E-06

On cherche, cette fois-ci, un minorant de la durée moyenne de bon fonctionnement, et donc la borne inférieure de l'intervalle de confiance unilatéral, soit 24356 < MTTF ou $\lambda_{50°C}$ < 41,0575 E-06 à 60% et 12647 < MTTF ou $\lambda_{50°C}$ < 79,06 E-06 à 90%.

<u>Estimation de $\lambda_{30°C}$:</u>

Le facteur d'accélération en température est obtenu par la loi d'Arrhenius : AF = exp[Ea/K*(1/T1-/T2)]

avec Ea : l'énergie d'activation (valeurs comprises entre 0,3 à 1,2 eV, soit 0,7 en l'absence de données du constructeur) et K : la constante de Boltzman (8,617 10-5 Kelvin/eV)

$AF_{30°c}^{50°C}$ = exp[(0,7/8,617 10-5)*(1/(273+30)-1/(273+30))] = 5,26

$\lambda_{30°C} = \lambda_{50°C} / AF_{30°c}^{50°C}$ $\lambda_{30°C}$ < 7,80 E-06 à 60% $\lambda_{30°C}$ < 15,03 E-06 à 90%

2.4 Loi Binomiale

L'intervalle de confiance de la loi binomiale est défini par les expressions suivantes, dans lesquelles n est la taille de l'échantillon et m le nombre d'éléments ayant la caractéristique de probabilité p.

Intervalle bilatéral :

Borne inférieure : $\sum_{k=o}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha / 2$

Borne supérieure : $\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha / 2$

Intervalle unilatéral :

Borne inférieure : $\sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha$

Borne supérieure : $\sum_{k=o}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha$

2 pièces ont été trouvées défectueuses dans un échantillon de 45 pièces. Nous recherchons un majorant de la probabilité qu'une pièce issue du même lot soit défectueuse, soit la borne supérieure de l'intervalle unilatéral

à 60 % : $(1\text{-p})^{48} + 48 * P * (1\text{-p})^{47} + C^2_{48} * P^2 * (1\text{-p})^{46}$ = 40 % soit $p_{60\%}$ = 0,064

à 90 % : $(1\text{-p})^{48} + 48 * P * (1\text{-p})^{47} + C^2_{48} * P^2 * (1\text{-p})^{46}$ = 10 % soit $p_{90\%}$ = 0,107

La résolution de cette équation à une inconnue peut se faire au moyen de l'outil d'optimisation GENCAB, par le solver d'Excel ou par tâtonnement sur le tableur.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Partie décimale de la probabilité de trouver une valeur inférieure à u . La ligne donne les deux premiers chiffres de *u*, et la colonne le troisième

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1	84134	84375	84614	84849	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91309	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92785	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574
2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989

LOI DU KHI-2

Pour un nombre n de degrés de liberté et un seuil de vraisemblance (1- risque d'erreur accepté)

n	0,01	0,025	0,05	0,1	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99
1	0,0002	0,001	0,004	0,02	0,45	2,71	3,84	5,02	6,63
2	0,02	0,05	0,1	0,21	1,39	4,61	5,99	7,38	9,21
3	0,11	0,22	0,35	0,58	2,37	6,25	7,81	9,35	11,34
4	0,3	0,48	0,71	1,06	3,36	7,78	9,49	11,14	13,28
5	0,55	0,83	1,15	1,61	4,35	9,24	11,07	12,83	15,09
6	0,87	1,24	1,64	2,2	5,35	10,64	12,59	14,45	16,81
7	1,24	1,69	2,17	2,83	6,35	12,02	14,07	16,01	18,48
8	1,65	2,18	2,73	3,49	7,34	13,36	15,51	17,53	20,09
9	2,09	2,7	3,33	4,17	8,34	14,68	16,92	19,02	21,67
10	2,56	3,25	3,94	4,87	9,34	15,99	18,31	20,48	23,21
11	3,05	3,82	4,57	5,58	10,34	17,28	19,68	21,92	24,73
12	3,57	4,4	5,23	6,3	11,34	18,55	21,03	23,34	26,22
13	4,11	5,01	5,89	7,04	12,34	19,81	22,36	24,74	27,69
14	4,66	5,63	6,57	7,79	13,34	21,06	23,68	26,12	29,14
15	5,23	6,26	7,26	8,55	14,34	22,31	25	27,49	30,58
16	5,81	6,91	7,96	9,31	15,34	23,54	26,3	28,85	32
17	6,41	7,56	8,67	10,09	16,34	24,77	27,59	30,19	33,41
18	7,01	8,23	9,39	10,86	17,34	25,99	28,87	31,53	34,81
19	7,63	8,91	10,12	11,65	18,34	27,2	30,14	32,85	36,19
20	8,26	9,59	10,85	12,44	19,34	28,41	31,41	34,17	37,57
21	8,9	10,28	11,59	13,24	20,34	29,62	32,67	35,48	38,93
22	9,54	10,98	12,34	14,04	21,34	30,81	33,92	36,78	40,29
23	10,2	11,69	13,09	14,85	22,34	32,01	35,17	38,08	41,64
24	10,86	12,4	13,85	15,66	23,34	33,2	36,42	39,36	42,98
25	11,52	13,12	14,61	16,47	24,34	34,38	37,65	40,65	44,31
26	12,2	13,84	15,38	17,29	25,34	35,56	38,89	41,92	45,64
27	12,88	14,57	16,15	18,11	26,34	36,74	40,11	43,19	46,96
28	13,56	15,31	16,93	18,94	27,34	37,92	41,34	44,46	48,28
29	14,26	16,05	17,71	19,77	28,34	39,09	42,56	45,72	49,59
30	14,95	16,79	18,49	20,6	29,34	40,26	43,77	46,98	50,89
40	22,16	24,43	26,51	29,05	39,34	51,81	55,76	59,34	63,69
50	29,71	32,36	34,76	37,69	49,33	63,17	67,5	71,42	76,15
60	37,48	40,48	43,19	46,46	59,33	74,4	79,08	83,3	88,38
70	45,44	48,76	51,74	55,33	69,33	85,53	90,53	95,02	100,43
80	53,54	57,15	60,39	64,28	79,33	96,58	101,88	106,63	112,33
90	61,75	65,65	69,13	73,29	89,33	107,57	113,15	118,14	124,12
100	70,06	74,22	77,93	82,36	99,33	118,5	124,34	129,56	135,81