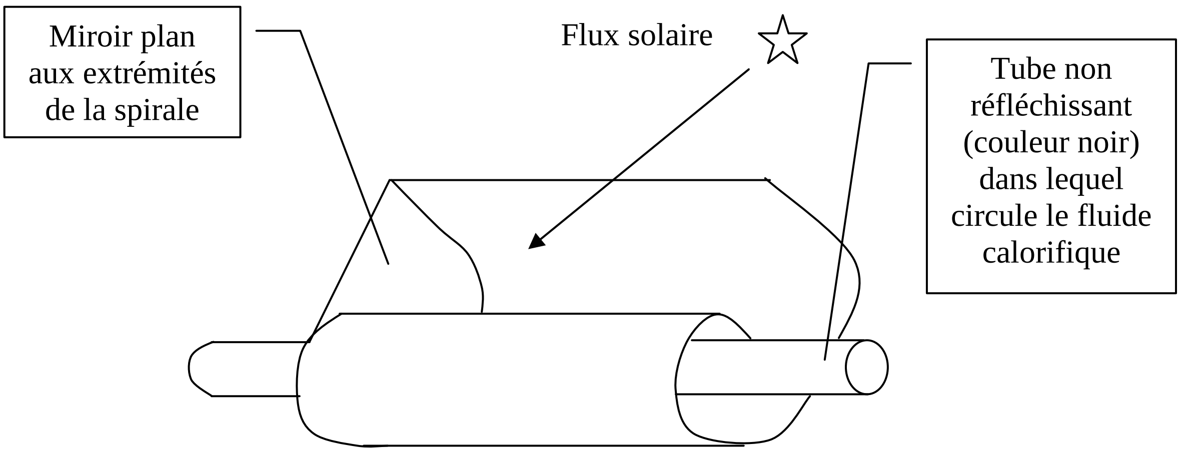
TP SdF N° 18

Optimisation d'un concentrateur solaire

Ce TP a pour objet de montrer l'apport d'un outil d'optimisation en conception. Il consiste à rechercher la forme optimale d'un concentrateur solaire (voir le brevet d'invention correspondant).

Problématique : La forme générale du concentrateur est celle d'une spirale réfléchissante qui concentre le flux solaire reçu vers un tube cylindrique non réfléchissant (de couleur noire) dans lequel circule un fluide calorifique.

On cherche à optimiser la forme de la spirale de manière à assurer une captation totale du flux solaire reçu avec un taux de concentration maximal et empêcher toute réflexion parasite dirigée vers l'extérieur.



1 – Exprimer les conditions d'optimalité de la spirale.

2 – Montrer qu'une spirale d'Archimède ($r = k_0 + k\theta$) constitue une solution non optimale à proximité du tube cylindrique

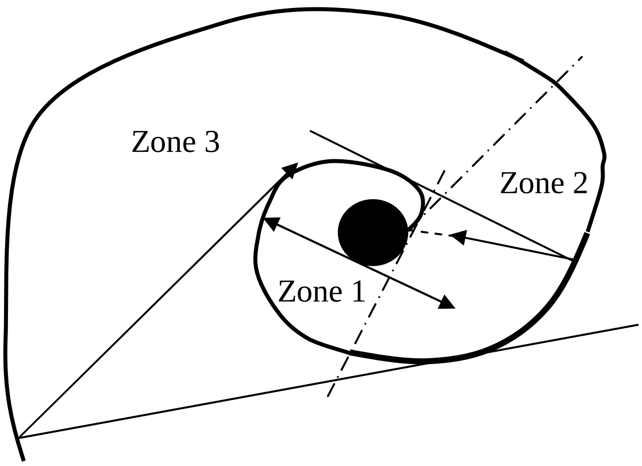
3 – Trouver une meilleure solution de la forme $r = k_0 + k_1\theta^{1/2} + k_2\theta + k_3\theta^2$ en utilisant un outil d'optimisation pour trouver les coefficients k_i qui maximisent l'ouverture de la spirale en satisfaisant la contrainte de pente en différents points.

4 – Comparer cette solution avec celle obtenue par la méthode d'Euler et expliquer pourquoi cette dernière ne peut être utilisée pour définir l'ensemble de la spirale.

5 – Proposer une démarche d'optimisation complète de la spirale au moyen d'un outil.

1 – Conditions d'optimalité de la spirale

Tous les rayons solaires entrant dans la spirale doivent atteindre le tube cylindrique sans possibilité de réflexion dirigée vers l'extérieur.



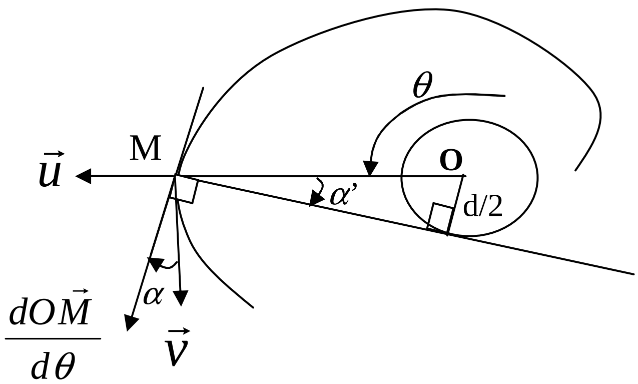
- Dans la zone 1, partant de la liaison de la spirale au tube et limitée par la tangente commune au cylindre et à la spirale, la perpendiculaire à la tangente de la spirale en un point doit être tangente au tube cylindrique.

- Dans la zone 2, au delà de la zone 1 et limitée par la tangente de la spirale à son point d'origine, la perpendiculaire à la tangente de la spirale en un point doit être la bissectrice de l'angle formé par la tangente à la spirale passant par ce point et la droite passant par l'origine de la spirale et ce point.

- Dans la zone 3 au delà de la zone 2, la perpendiculaire à la tangente de la spirale en un point doit être la bissectrice de l'angle formé par les deux tangentes à la spirale passant par ce point.

2 – Recherche de solution dans la zone 1

La perpendiculaire à la tangente de la spirale en un point doit être tangente au tube cylindrique.



$$\vec{OM} = r\vec{u} \qquad \frac{d\vec{OM}}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\vec{u} + r\vec{v} \qquad tg\alpha = \frac{\frac{dr}{d\theta}}{r} = tg\alpha' = \frac{d/2}{\sqrt{r^2 - d^2/4}} \qquad \boxed{\frac{dr}{d\theta} = \frac{rd/2}{\sqrt{r^2 - d^2/4}}}$$

Cette équation différentielle n’a pas de solution évidente. Une solution non optimale, pour laquelle tous les rayons entrent dans la spirale ($\alpha < \alpha'$), peut cependant être obtenue :

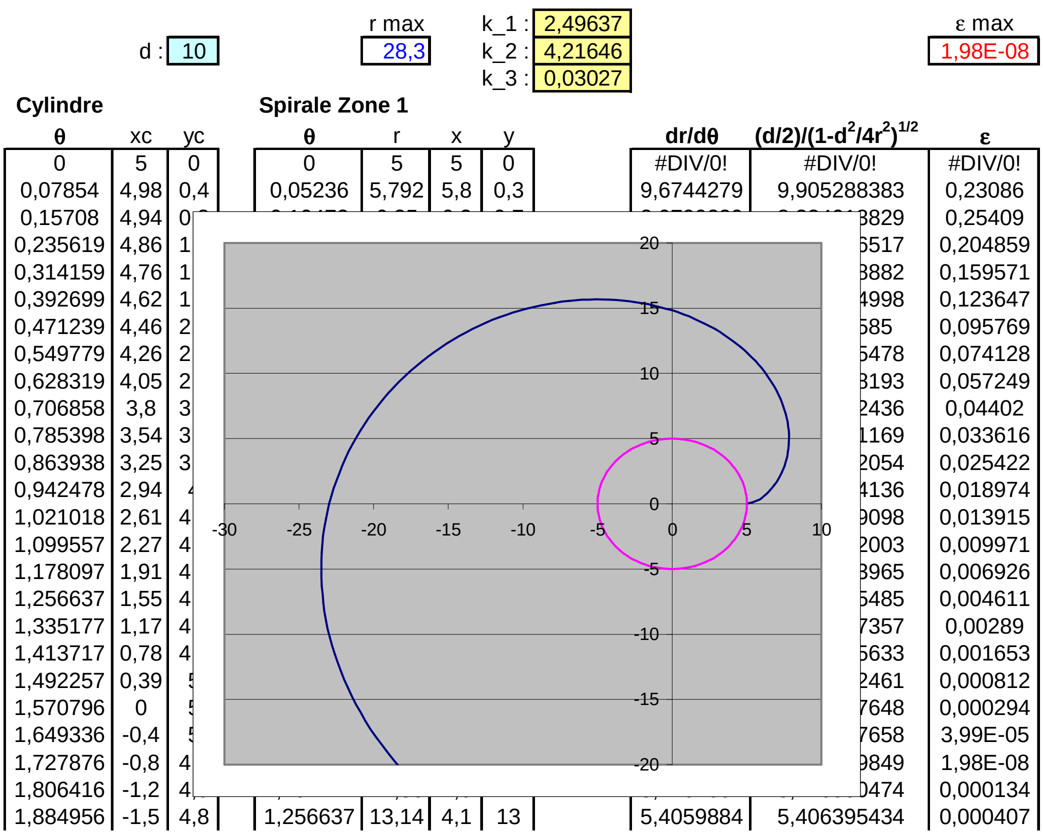
$$tg\alpha = \frac{\frac{dr}{d\theta}}{r} = \frac{d/2}{r} \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{d\theta} = d/2$$

soit $\boxed{r = d/2(\theta + 1)}$ l’équation d’une spirale d’Archimède.

3 – Recherche d’une solution paramétrique

Une solution de la forme $r = d/2 + k_1\theta^{1/2} + k_2\theta + k_3\theta^2$ peut être obtenue en utilisant un outil d’optimisation pour trouver les coefficients k_i qui maximisent le rayon final de la courbe en satisfaisant la contrainte de pente $\frac{dr}{d\theta} \leq \frac{rd/2}{\sqrt{r^2 - d^2/4}}$ en différents points.

La solution suivante a été obtenue avec 80 points au moyen de l’outil GENCAB (basé sur une méthode hybride associant les Algorithmes Génétiques et le Simplexe non linéaire) :



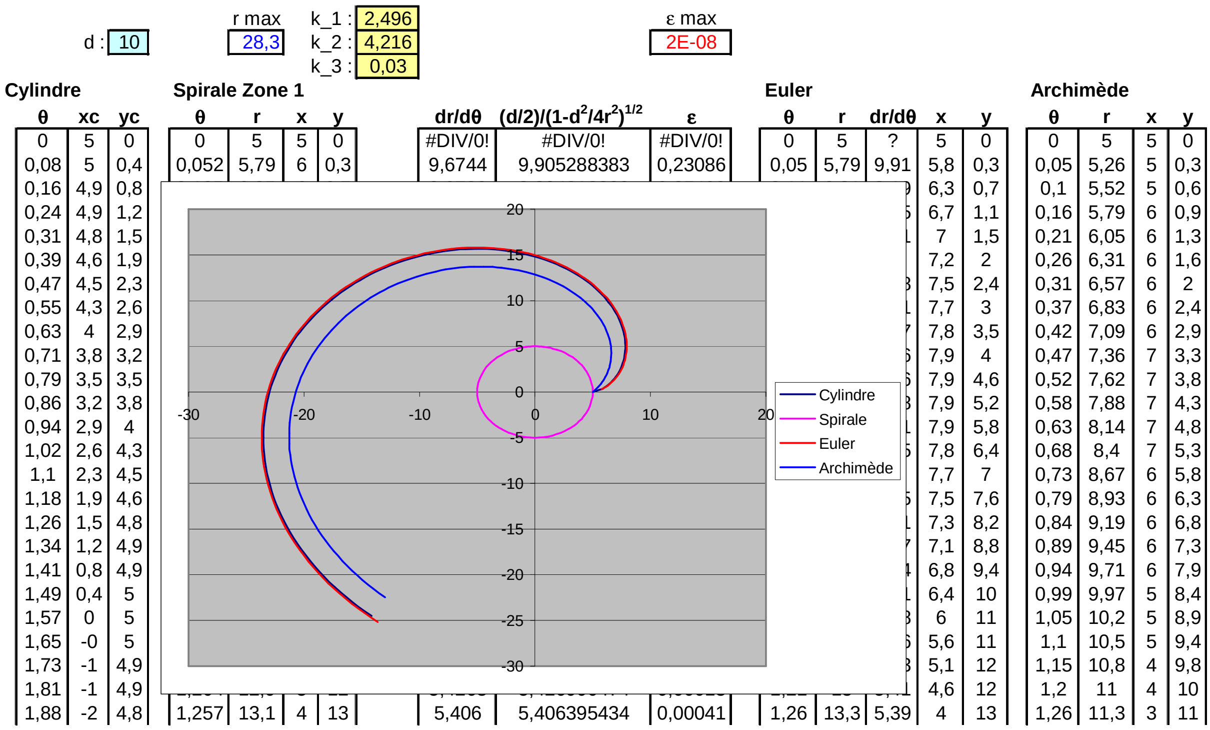
Zone 1.xls (43 Ko)

Ouvrir le fichier Excel par double clic :

4 – Comparaison avec la méthode d'Euler

Une solution très voisine peut être également obtenue numériquement par la méthode d'Euler en calculant pour chaque point la valeur optimale de la dérivée $\dfrac{rd/2}{\sqrt{r^2 - d^2/4}}$ et en considérant une même pente à l'origine que dans la solution paramétrique (valeur indéfinie).

Ce résultat démontre la quasi optimalité de la solution paramétrique qui est significativement meilleure que la spirale d'Archimède comme le montre les courbes suivantes :



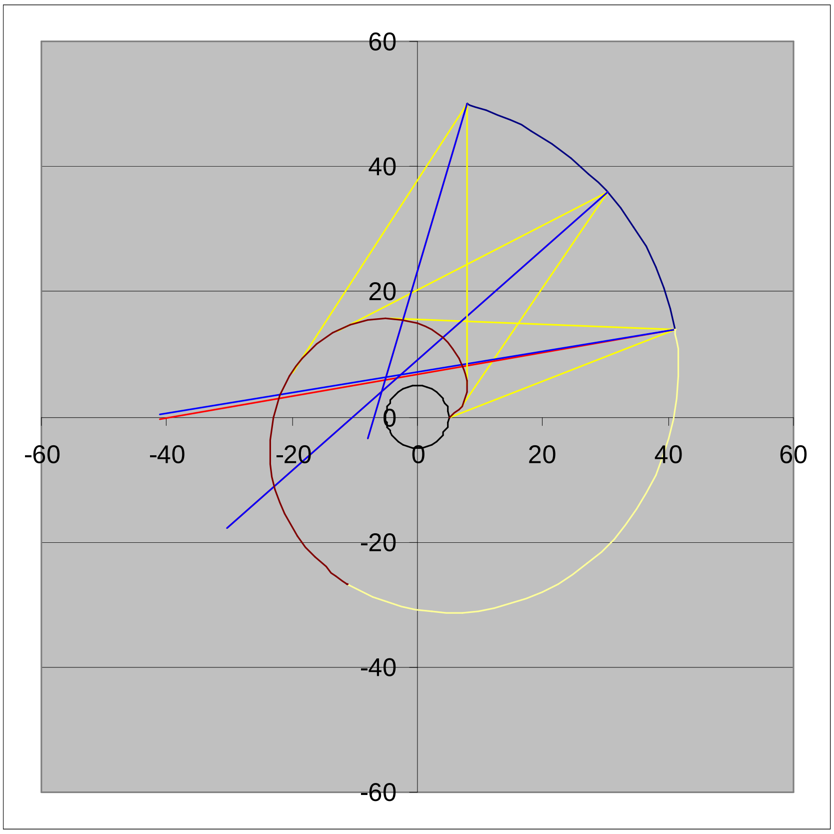
Euler.xls (69 Ko)

Ouvrir le fichier Excel par double clic :

Au-delà de la zone 1, la spirale peut difficilement s'obtenir par la méthode d'Euler car chaque point est défini à partir d'une ou de deux droites tangentes à la spirale dans sa spire précédente.

5 - Démarche d'optimisation de la spirale au-delà de la zone 1

Sous forme paramétrique, la spirale peut être évaluée de proche en proche, en considérant les diverses conditions à respecter en 3 points successifs.
Les paramètres de la spirale et la valeur de l'angle polaire des différents points appartenant aux tangentes à la spirale passant par les 3 points sont alors obtenus globalement par optimisation en considérant les diverses conditions à respecter sous la forme de contraintes.


60
40
20
0
-20
-40
-60
-60
-40
-20
0
20
40
60