TP SdF N° 19

Ajustement d'un modèle de fiabilité en mécanique

Ce TP porte sur l'ajustement de différents modèles de fiabilité à partir de données expérimentales (résultats d'essais ou retour d'expérience en exploitation).

1 – Techniques d'ajustement

Présenter les principales méthodes d'ajustement de lois de probabilité.

2 – Ajustement d'un modèle de Weibull

a – Soit les données censurées suivantes correspondant à des durées de bon fonctionnement d'un parc d'équipements mécaniques, rechercher les paramètres bêta et sigma de la loi de Weibull correspondante.

Durées avant panne :

3510	3183	8408	4808	5587	4591	5198	267	5164	5234	7261	5 575	6021	6483
1978	1767	4367	2320	4223	6477	5212	3129	8908	1810	4410	4 724	3840	2744
4356	3955	5222	7959	4940	3507	5693	1110	4573	1746	2996	4826	3415	4562

Durées sans panne :

3777	5171	8693	7091	958	3866	3694

b – Simuler 1000 valeurs de la loi de Weibull (bêta = 3 et sigma = 5000) puis retrouver les paramètres de cette loi par ajustement à partir des valeurs simulées.

2 – Ajustement d'un modèle de Cox

Ajuster un modèle de Cox à 2 facteurs de risque X et Y à partir des résultats d'éssais suivants pour les conditions opérationnelles X = 40 et Y = 30 :

Essais accélérés de 16 équipements censurés à 9000 heures

T(X =10,Y=95) :	2574	5717	4733	1378	6984	4379	2807	4795	4258	6429	3081	6559	4026

Orde des défaillances au cours de deux essais relatifs aux facteurs X et Y

X (Y=30) :	10	25	5	15	35	30	45	20	*Sans défaillance :*	50	40
Y (X=40) :	90	80	100	60	70	40	50	20	30	*Sans défaillance :*	10

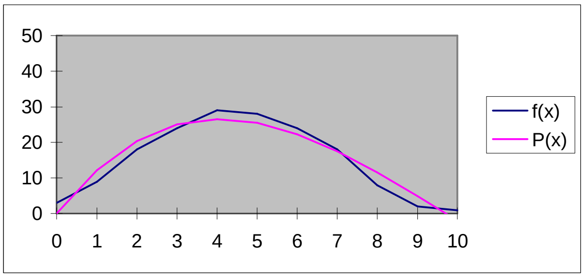
1 – Techniques d'ajustement

L'ajustement consiste à trouver les paramètres d'une fonction mathématique afin de la faire correspondre au mieux à une courbe expérimentale. La méthode d'ajustement la plus connue est la méthode des moindre carrés, illustrée par l'exemple suivant, qui consiste à minimiser la somme des écarts (élevés au carré pour s'affranchir des signes) entre les courbes expérimentale et théorique :

Méthode des moindres carrés

Ajustement d'une fonction à un polynôme : $P(x) = a + b * x + c * x^2 + d * x^3$

x	f(x)	P(x)	$Erreur^2$
0	3	0,0132	8,9211
1	9	12,2167	10,3471
2	18	20,3895	5,7099
3	24	25,0096	1,0194
4	29	26,5550	5,9781
5	28	25,5035	6,2327
6	24	22,3331	2,7787
7	18	17,5217	0,2287
8	8	11,5474	12,5838
9	2	4,8880	8,3403
10	1	-1,9786	8,8718



Erreur moyenne : 2,6648 ↓

a :	0,0132
b :	14,3782
c :	-2,2543
d :	0,0797

Ouvrir le fichier Excel par double clic :

Moindres_carrés.xls
(16 Ko)

Cependant, cette méthode s'applique mal aux lois de probabilité car les points d'une courbe correspondant à une fonction de densité de probabilité ou à une fonction de répartition sont interdépendants (la probabilité d'occurrence entre 0 à l'infini est égal à 1).

Aussi peut-on employer la méthode des moments qui consiste à choisir les paramètres de la loi théorique de manière à ce que ses moments $E[(X-E(X))^k]$ (écart_type pour k = 1) correspondent au mieux à ceux de la loi expérimentale. L'ajustement s'effectue alors en minimisant la somme des écarts entre les moments d'ordre 1 à k , élevés au carré.

Mais la méthode la plus utilisée est la méthode du maximum de vraisemblance (maximum likelihood) qui consiste à choisir un modèle théorique donnant une densité de probabilité maximale pour les données expérimentales. On cherche ainsi la valeur des paramètres θ qui maximise le produit $\boldsymbol{\Pi_1^n f(ti,\theta)}$.

Dans le cas de données de retour d'expérience, généralement censurées à droite, on multiplie ce produit par la probabilité de non-apparition de l'événement au moment de la censure, donnée par le modèle théorique pour chacune des durées correspondantes, soit $\boldsymbol{\Pi_1^n f(ti,\theta) * \Pi_1^m (1-F(tj,\theta))}$.

Pour un modèle de fiabilité, cette expression devient $\boldsymbol{\Pi_1^k f(ti,\theta) * \Pi_{k+1}^n R(tj,\theta))}$ si k défaillances parmi n équipements sont apparues pendant les essais.

Remarques :

- Si les données sont nombreuses, il est nécessaire de maximiser la somme des logarithmes des différents termes du produit, dont certains ont des valeurs très proches de zéro, pour éviter des problèmes de calcul numérique.
- Suite à l'ajustement, différents tests statistiques (khi-2, Kolmogorov-Smirnov…) peuvent être employés avant d'accepter ou de rejeter le modèle théorique. Ces tests consistent à évaluer de différentes manières l'écart entre les fonctions de répartition du modèle théorique et des données expérimentales puis d'en déduire une probabilité d'erreur via les tables correspondantes.

2 – Ajustement d'un modèle de Weibull

La densité de probabilité et la fonction de répartition d'une loi de Weibull ont pour expressions :

$$\mathbf{f(t) = \beta(t-\gamma)^{\beta-1}/\sigma^{\beta} \exp(-[(t-\gamma)/\sigma]^{\beta})} \qquad \mathbf{F(t) = 1- \exp(-[(t-\gamma)/\sigma]^{\beta})}$$

soit si $\gamma = 0$ ($t_0 = 0$) :

$$\mathbf{f(t) = \beta t^{\beta-1}/\sigma^{\beta} \exp(-[t/\sigma]^{\beta})} \qquad \mathbf{F(t) = 1- \exp(-[t/\sigma]^{\beta})}$$

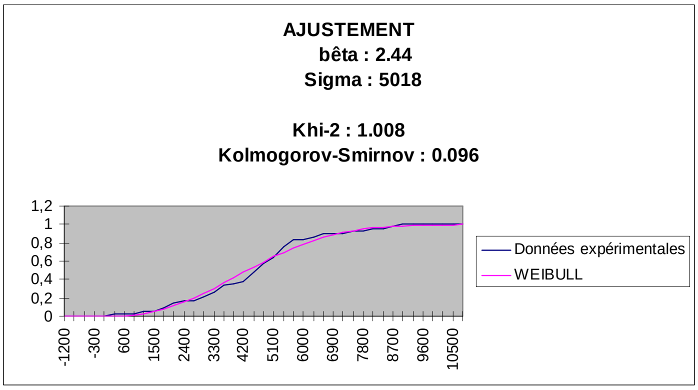
La vraisemblance à maximiser est donc :

$$\mathbf{\Pi_1^{\,k}\ \beta t_i^{\beta-1}/\sigma^{\beta} \exp(-[t_i/\sigma]^{\beta})} \qquad \textit{données non censurées}$$

$$\text{ou} \quad \mathbf{\Pi_1^{\,k}\ \beta t_i^{\beta-1}/\sigma^{\beta} \exp(-[t_i/\sigma]^{\beta}) * \Pi_{k+1}^{\,n} \exp(-[t_i/\sigma]^{\beta})} \quad \textit{données censurées}$$

a – <u>Application</u>

L'outil SIMCAB propose l'ajustement suivant pour les données à traiter dans ce TP mais ne considère que des données non censurées dans sa version actuelle.



Les données censurées peuvent cependant être traitées au moyen de l'outil d'optimisation GENCAB comme indiqué ci-après.

Ajustement d'un modèle de Weibull (données censurées)

Bêta :	2,469682262
Sigma :	5022,891201

	Vraisemblance	
$\sum \ln(f(Ti))$:	-376,606721	*Pannes*
$\sum \ln(1-F(Tj))$	-368,049661	*Censures*
$\sum$:	-359,437422	

Durées avant panne

T_i	$\ln(f(T_i))$
3510	-8,55705977
3183	-8,61223924
8408	-10,4296676
4808	-8,5795731
5587	-8,76189436
4591	-8,55068772
5198	-8,65562417
267	-11,9311843
5164	-8,64777252
5234	-8,66419043
7261	-9,56066499

Durées avant censure

T_j	$\ln(1-F(T_j))$
3777	0,39017304
5171	0,65850018
8693	0,97925416
7091	0,90399811
958	0,01656621
3866	0,40777119
3694	0,37385315

Feuille de calcul
Microsoft Excel

Remarques :

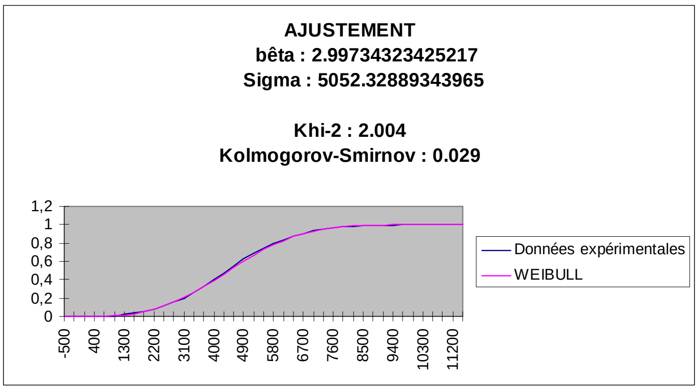
- Les macro-fonctions de l'outil SIMCAB donnant la densité de probabilité et la fonction de répartition de diverses lois sont utilisées dans cet exemple :

Weibull : Densité_Wei(bêta;sigma;;t) FX_Wei(bêta;sigma;;t)

- Le logarithme de zéro n'étant pas défini, la valeur -100 est prise dans cet exemple quand la densité de probabilité est nulle.

b – <u>Simulation de valeurs avant ajustement</u>

1000 valeurs de la loi de Weibull (bêta = 3 et sigma = 5000) sont simulées en utilisant la macro-fonction L_Wei(bêta;sigma) de l'outil SIMCAB puis l'ajustement permet de retrouver les paramètres de la loi initiale.



2 – Ajustement d'un modèle de Cox

Utilisé en épidémiologie pour prendre en compte plusieurs facteurs de risque dans la survenue d'une maladie, le modèle de COX est un modèle de vie accélérée dans lequel le taux de défaillance de base est affecté par différents facteurs Xi favorisant ($\beta i>0$) ou s'opposant ($\beta i<0$) à l'apparition des défaillances :

$$\lambda(t)=\lambda 0(t)*\exp(\sum \beta iXi)$$

Ce modèle peut être utilisé en fiabilité mécanique pour prendre en compte certains facteurs de stress (charge, sollicitation, température, etc.). Dans le cadre d'essais accélérés, sa forme particulière permet l'estimation des coefficients βi indépendamment de $\lambda 0(t)$ puis l'évaluation de ce dernier dans des conditions sévérisées (suivant une loi de Weibull par exemple).

<u>A – Estimation des coefficients βi</u>

Les coefficients βi peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance en considérant la vraisemblance partielle de Cox définie de la manière suivante :

- La probabilité qu'un équipement tombe en panne pendant Δt, sachant qu'il fonctionne encore à t, est :

$$\lambda(t)*\Delta t = \lambda 0(t)*\exp(\sum \beta iXi)*\Delta t$$

- Au cours d'un essai concernant le seul facteur X, cette probabilité devient :

$$\lambda 0(t)*K*\exp(\beta X)*\Delta t$$

- Avant une défaillance, la probabilité que cela soit l'équipement i qui tombe en panne parmi les survivants est :

$$\lambda 0(t)*K*\exp(\beta Xi)*\Delta t \,/\, \sum_{\text{Survivants}} \lambda 0(t)*K*\exp(\beta Xj)*\Delta t$$

$$\text{soit} \quad \exp(\beta Xi) \,/\, \sum_{\text{Survivants}} \exp(\beta Xj)$$

- Portant sur l'ordre effectif des défaillances au cours de l'essai, la vraisemblance partielle de Cox que l'on cherche à maximiser s'exprime alors de la manière suivante :

$$V(\beta) = \prod_{i=1 \text{ à } n} \exp(\beta Xi) \,/\, \sum_{\text{Survivants avant panne de } i} \exp(\beta Xj)$$

A partir des données d'essais fournies, l'estimation des coefficients β_X et β_Y peut être effectuée au moyen de l'outil GENCAB de la manière indiquée ci-après, en donnant pour résultats :

$$\beta_X = -0{,}070 \qquad \beta_Y = 0{,}078$$

Estimation des coefficients β

β : -0,0705949

N°panne	Xi	Exp(βXi)	Variance
1	10	0,4936399	0,215265154
2	25	0,17120863	0,095140665
3	5	0,70259512	0,431483901
4	15	0,34682899	0,374655479
5	35	0,08451541	0,145993411
6	30	0,12029035	0,243313892
7	45	0,04172018	0,111523536
8	20	0,24368035	0,733153578
Censure	50	0,02931239	9,61608E-06
	40	0,05938012	

Estimation Bêta.xls
(11 Ko)

B – Ajustement d'un modèle de Weibull en conditions sévérisées (X=10, Y=95)

L'ajustement s'effectue de la même manière qu'à l'exercice 1 en considant 3 équipements survivants au terme de l'essai.

Ajustement d'un modèle de Weibull

Bêta : 3,08125938
Sigma : 5029,40486

Vraisemblance

Σln(f(Ti)) :	-114,413959	*Pannes*
Σln(1-F(Tj))	2,99262138	*Censures*
Σ :	-96,8803886	

Durées avant panne

T_i	$\ln(f(T_i))$
2574	-8,91854132
5717	-8,61502876
4733	-8,3534456
1378	-10,1111202
6984	-9,46453531
4379	-8,3386017
2807	-8,77728558
4795	-8,36025907
4258	-8,34291495
6429	-9,01782026
3081	-8,63870091
6559	-9,11114405
4026	-8,36456105

Durées avant censure

T_j	$\ln(1-F(T_j))$
9000	0,99754046
9000	0,99754046
9000	0,99754046

Weibull sévérisé.xls
(13 Ko)

C – Passage au modèle de Weibull en conditions opérationnelles (X=40 et Y=30):

Le taux de défaillance dans un modèle de Weibull est égal à $\boldsymbol{\lambda(t) = \beta(t-\gamma)^{\beta-1}/\sigma^{\beta}}$ $f(t)=\lambda(t)*(1-F(t))$

Il est aussi égal à $\boldsymbol{\lambda(t) = \lambda_0(t)*\exp(\sum\beta iXi)}$ dans le modèle de Cox.

On en déduit l'égalité suivante entre 2 conditions différentes de sévérisation :

$$\exp(\sum\beta iXi_1)*\sigma_1^{\beta} = \exp(\sum\beta iXi_2)*\sigma_2^{\beta}$$

soit : $\sum\beta iXi_1+\beta*\log(\sigma_1) = \sum\beta iXi_2+\beta*\log(\sigma_2)$ $\sum\beta i(Xi_1- Xi_2) = \beta*(\ln(\sigma_2)- \ln(\sigma_1))$

d'où $\sigma_2 = \sigma_1*\exp(\sum\beta i(Xi_1- Xi_2)/\beta)$

Les facteurs de risque n'ont pas d'impact sur la valeur du coefficient β mais seulement sur le coefficient σ.

Dans l'exemple traité, ce dernier est égal à :

5029*EXP((-0,07*(10-40)+0,078*(95-30))/3,08) = 51580 en condition opérationnelle.

Et les courbes comparatives de fiabilité sont présentées ci-dessous.