

## TP SdF N° 22

# Modélisation et optimisation de la maintenance d'un matériel réparable

Après une maintenance corrective, l'état d'un équipement peut être :

- Aussi bon que neuf (as good as new)
- Dans l'état correspondant à son âge (as bad as old)
- Dans un état intermédiaire (better than old but worse than new)

en excluant les états mieux que neuf ou pire que son âge.

Aussi 3 modèles ont-ils été proposés pour modéliser respectivement ces 3 types de maintenance :

- Le processus de remplacement RP (Renewal Process)
- Le processus non homogène de Poisson NHPP (Non-homogeneous Poisson process)
- Le processus de remplacement généralisé GRP (Generalized Renewal Process) de type 1 ou 2.

L'objet de ce TP est d'étudier ces 3 modèles, de les ajuster à partir de données opérationnelles et de simuler les différents processus de maintenance. Il propose également une optimisation de la durée d'amortissement d'un matériel après exploitation de données de retour d'expérience.

### 1- Modèle RP

1.1 – Ajuster les paramètres  $\beta$  et  $\sigma$  d'une loi de Weibull dans un processus RP à partir du REX suivant :

t(hr)	243	360	463	552	852	1320	1464	1543	1930	1956	2101	2219	2257	2331	2337	2339	2370	2481	2523	2594
N°de panne	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1.2 – Estimer, par simulation de Monte-Carlo, le nombre de pannes avant 5000 heures dans le cas d'un processus RP régi par une loi de Weibull de paramètres  $\beta = 2$  et  $\sigma = 500$ .

### 2 – Modèle NHPP

2.1 – Ajuster ces mêmes paramètres dans le cas d'un processus NHPP à partir du REX précédent.

2.2 – Estimer le nombre de pannes avant 5000 heures dans le cas d'un processus NHPP régi par une loi de Weibull de paramètres  $\beta = 2$  et  $\sigma = 500$ .

### 3 - Modèle GRP type 1 et 2

3.1 – Ajuster ces mêmes paramètres dans le cas d'un processus GRP à partir du REX précédent.

3.2 – Estimer le nombre de pannes avant 5000 heures dans le cas d'un processus GRP régi par une loi de Weibull de paramètres  $\beta = 2$ ,  $\sigma = 500$  avec pour facteur de rajeunissement  $p = 0,5$ .

### 4 - Optimisation de la durée d'amortissement

Sachant que la maintenance corrective conduisant au REX précédent a un certain effet de rajeunissement et que son coût représente 10% du coût de remplacement de l'équipement, optimiser la durée d'amortissement de ce dernier (on utilisera le modèle GPR 1).

## 1 - Processus de remplacement RP (Renewal Process)

L'équipement est aussi bon que neuf après chaque action de maintenance corrective. Chaque période de fonctionnement peut être modélisé par une loi de Weibull à 2 paramètres  $\beta$  et  $\sigma$ .

$$\text{Densité de probabilité : } f(t) = \beta t^{\beta-1} / \sigma^\beta \exp(-[t/\sigma]^\beta)$$

1.1. L'ajustement de la loi peut s'effectuer à partir de données opérationnelles (non censurées dans cet exemple) au moyen d'un outil d'optimisation par la méthode du maximum de vraisemblance (voir TP 20). Cette méthode consiste à rechercher le modèle théorique qui donne la densité de probabilité maximale pour les valeurs expérimentales (maximum du produit des densités ou de la somme des logarithmes des densités) :

### Processus de maintenance RP

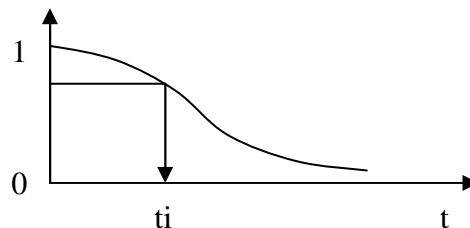
Ajustement		Weibull	
Bêta :		1.04	
Sigma :		131.65	

N° de panne	t(hr)	Durée de fonctionnement	Densité de probabilité (logarithmes)
1	243	243	-6,70959377
2	360	117	-5,7324197
3	463	103	-5,62970504
4	552	89	-5,52344972
5	852	300	-7,16350712
6	1320	467	-8,51751817
7	1464	145	-5,94328047
8	1543	78	-5,44682018
9	1930	387	-7,86515336
10	1956	27	-5,0933531
11	2101	145	-5,94208946
12	2219	118	-5,73610189
13	2257	38	-5,1663549
14	2331	74	-5,41341658
15	2337	6	-5,00050336
16	2339	3	-5,00813215
17	2370	30	-5,11545064
18	2481	112	-5,69149645
19	2523	42	-5,19054222
20	2594	71	-5,39588725
			-117,284776 Max



Ajustement RP.xls  
(14 Ko)

1.2. Chaque période de fonctionnement peut être simulée en tirant une valeur aléatoire entre 0 et 1 et en lui appliquant l'inverse de la fonction de répartition de la loi de Weibull :



Fonction de répartition :  $F(t) = 1 - \exp(-[t/\sigma]^\beta)$

Fonction inverse :  $t = -\sigma * \ln(1 - F(t))^{1/\beta}$

$t_i = \sigma * (-\ln(\text{ALEA()}))^{1/\beta}$  sous Excel ou  $t_i = L\_Wei(\beta; \sigma; 0)$  sous l'outil SIMCAB

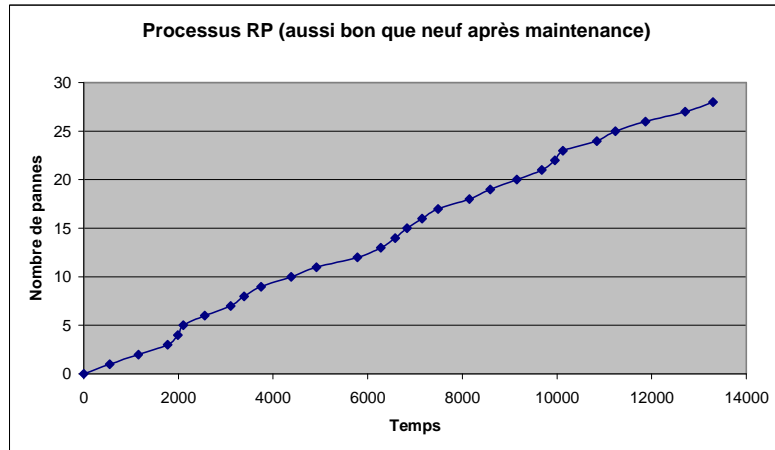
L'instant de la ième panne correspond alors à la somme des i périodes de fonctionnement :

$$T_i = \sum_{l=1}^i t_l$$

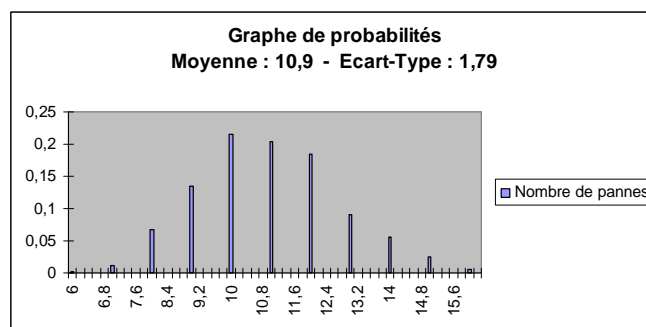
## Processus de maintenance RP

Bêta : 2  
Sigma : 500

T	Nb pannes
0	0
548	1
1152	2
1773	3
1987	4
2108	5
2559	6
3106	7
3386	8
3743	9
4380	10
4916	11
5782	12
6276	13
6581	14
6827	15
7145	16
7490	17
8144	18
8590	19
9152	20
9680	21
9956	22
10125	23
10836	24
11230	25
11864	26
12703	27
13292	28
13823	29
13865	30
14330	31
15404	32
16007	33
16511	34
17214	35
17442	36
17736	37



Nombre de pannes avant 5000 heures : 11



RP.xls (46 Ko)

## 2 - Processus non homogène de Poisson NHPP (Non-homogeneous Poisson process)

La maintenance corrective n'a pas d'effet sur le vieillissement de l'équipement.

La probabilité que l'équipement soit en panne à  $t$ , sachant qu'il a été réparé à  $t_r$  est égale à :

$$[F(t)-F(t_r)]/R(t_r) = (1-R(t)-1+R(t_r)) / R(t_r) = 1 - R(t)/R(t_r)$$

La fonction de répartition correspondante est :  $F'(t) = 1 - \exp[-(t_r/\sigma)^\beta - (t/\sigma)^\beta]$

Et celle de la densité de probabilité est :  $f'(t) = \beta t^{\beta-1}/\sigma^\beta \exp[-(t_r/\sigma)^\beta - (t/\sigma)^\beta]$

2.1. L'ajustement de la loi peut s'effectuer de la même manière que précédemment à partir de l'expression de la densité de probabilité.

# Processus de maintenance NHPP

Weibull  
 Bêta : 1,66  
 Sigma : 426,39

N° de panne	t(hr)	Durée de fonctionnement	Densité de probabilité (logarithmes)
1	243	243	-6,31311217
2	360	117	-6,02236295
3	463	103	-5,88680438
4	552	89	-5,76673715
5	852	300	-6,71223432
6	1320	467	-8,16451459
7	1464	145	-5,96452886
8	1543	78	-5,40178675
9	1930	387	-8,35240905
10	1956	27	-4,82564987
11	2101	145	-6,0711842
12	2219	118	-5,79407358
13	2257	38	-4,89348962
14	2331	74	-5,3000978
15	2337	6	-4,50186862
16	2339	3	-4,45877744
17	2370	30	-4,78068848
18	2481	112	-5,75347523
19	2523	42	-4,89964297
20	2594	71	-5,26355104
			-115,126989 Max



Ajustement NHPP.xls (17 Ko)

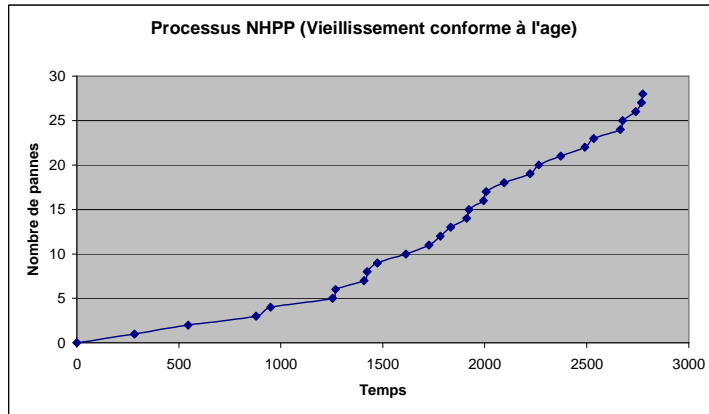
2.2. L'occurrence des pannes peut être simulée en tirant une valeur aléatoire entre 0 et 1 et en lui appliquant l'inverse de la fonction de répartition :

Fonction inverse :  $t = \sigma[-\ln(1-F'(t)) + (tr/\sigma)^\beta]^{1/\beta}$   $t_j = \sigma * (-\ln(ALEA())) + (t_i/\sigma)^\beta)^{1/\beta}$  sous Excel

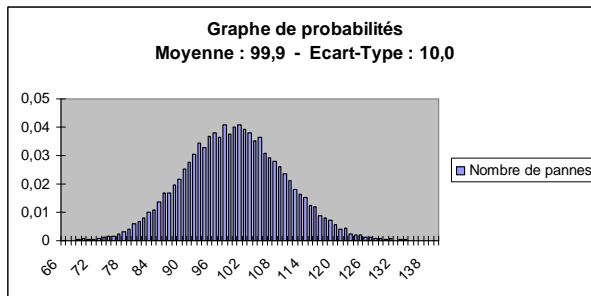
## Processus de maintenance NHPP

Bêta : 2  
 Sigma : 500

T	Nb pannes
0	0
283	1
545	2
879	3
950	4
1255	5
1268	6
1408	7
1423	8
1473	9
1613	10
1726	11
1782	12
1833	13
1912	14
1921	15
1993	16
2007	17
2094	18
2221	19
2265	20
2373	21
2491	22
2534	23
2665	24
2676	25
2739	26
2768	27
2774	28
2801	29
2838	30
2867	31
2873	32
2881	33
2929	34
2954	35
2998	36
3017	37



Nombre de pannes avant 5000 heures : 96



NHPP.xls (61 Ko)

### 3 - Processus de remplacement généralisé GRP (Generalized Renewal Process)

#### 3.1. GRP type 1 ou modèle de Kijima1

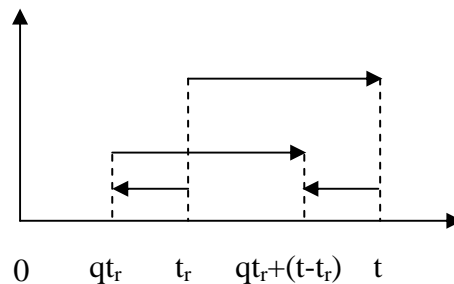
Dans le modèle GRP type 1, la maintenance corrective a un effet de rajeunissement de l'équipement proportionnel à la durée écoulée depuis la maintenance précédente. L'âge virtuel  $A_r$  de l'équipement à l'instant  $t_r$  juste après la  $r^{\text{ème}}$  action de maintenance est égal à :

$$A_r = A_{r-1} + q^*(t_r - t_{r-1}) = A_{r-2} + q^*(t_{r-1} - t_{r-2}) + q^*(t_r - t_{r-1}) = q^*t_r$$

avec  $q$  le facteur de rajeunissement.

$q = 0$  : rajeunissement complet (équivalent à un processus RP)

$q = 1$  : absence de rajeunissement (équivalent à un processus NHPP)



La fonction de répartition correspondante est :  $F'(t) = 1 - \exp[-(qt_r/\sigma)^\beta - ((qt_r+(t-t_r))/\sigma)^\beta]$

Et celle de la densité de probabilité est :  $f'(t) = \beta(qt_r+(t-t_r))^{\beta-1}/\sigma^\beta \exp[-(qt_r/\sigma)^\beta - ((qt_r+(t-t_r))/\sigma)^\beta]$

L'ajustement de la loi peut s'effectuer de la même manière que précédemment à partir de l'expression de la densité de probabilité.

## Processus de maintenance GRP 1

Ajustement	Weibull	
	Bêta :	2,09
	Sigma :	329,85
	q :	0,23

N° de panne	t(hr)	Durée de fonctionnement	Densité de probabilité (logarithmes)
1	243	243	-5,92383484
2	360	117	-6,00150898
3	463	103	-5,93401072
4	552	89	-5,87513562
5	852	300	-6,35766891
6	1320	467	-8,2500704
7	1464	145	-5,78491128
8	1543	78	-5,38730482
9	1930	387	-8,42863974
10	1956	27	-4,92190638
11	2101	145	-5,92704926
12	2219	118	-5,68464885
13	2257	38	-4,91806633
14	2331	74	-5,25022307
15	2337	6	-4,59656735
16	2339	3	-4,56280448
17	2370	30	-4,81131328
18	2481	112	-5,66643929
19	2523	42	-4,89297745
20	2594	71	-5,21366001
			-114,388741 Max



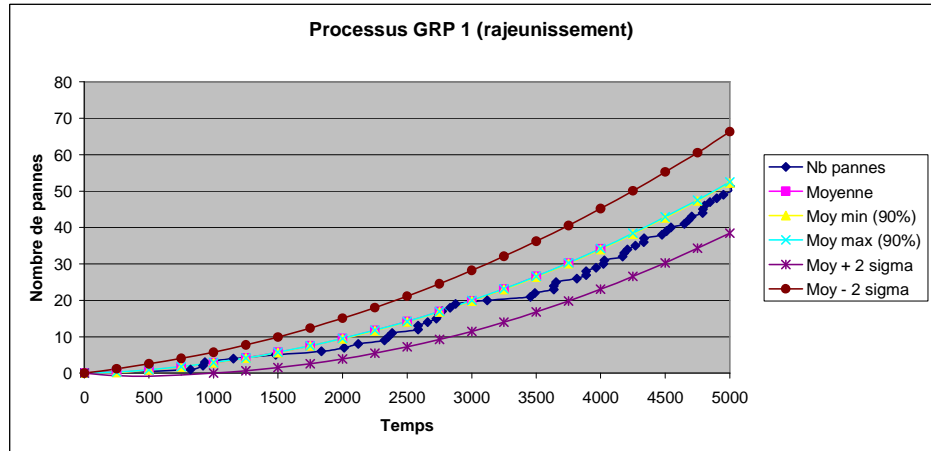
Ajustement  
GRP\_1.xls (17 Ko)

La fonction inverse de la fonction de répartition est alors :

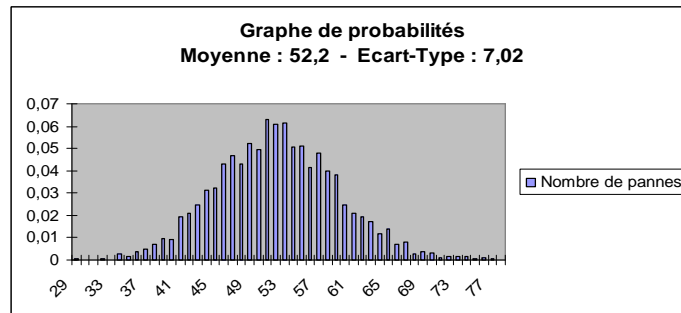
$$t = tr + \sigma [-\ln(1 - F^r(t)) + (q * tr / \sigma)^\beta]^{1/\beta} - q * tr$$

### Processus de maintenance GRP 1

Bêta :	2
Sigma :	500
q :	0,5
<b>T</b>	<b>Nb pannes</b>
0	0
822	1
918	2
935	3
1154	4
1482	5
1836	6
2012	7
2121	8
2324	9
2355	10
2385	11
2586	12
2587	13
2657	14
2727	15
2747	16
2772	17
2832	18
2876	19
3119	20
3455	21
3490	22
3635	23
3637	24
3654	25
3816	26
3885	27
3886	28
3962	29
4021	30
4027	31
4169	32
4183	33
4206	34
4269	35
4334	36
4336	37
4476	38



Nombre de pannes avant 5000 heures : 49



GRP1.xls (49 Ko)

### 3.2. GRP type 2 ou modèle de Kijima2

Le modèle GRP type 2 diffère du modèle GRP type 1 par le fait que la maintenance corrective conduit à un rajeunissement de l'équipement proportionnel à son âge virtuel. L'âge virtuel  $A_r$  de l'équipement à l'instant  $t_r$  juste après la  $r^{ème}$  action de maintenance est égal à :

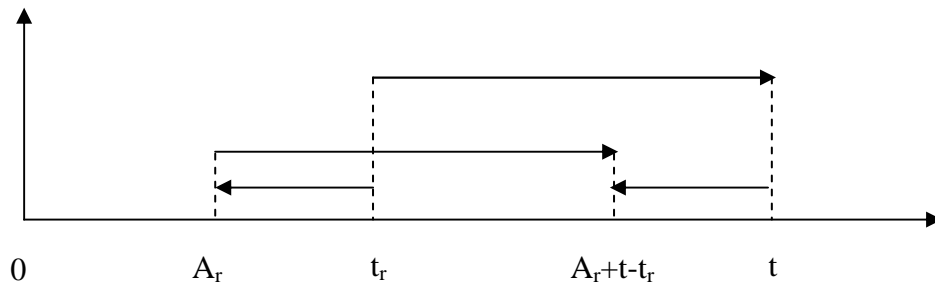
$$A_r = q * (A_{r-1} + t_r - t_{r-1}) = q * (q * (A_{r-2} + t_{r-1} - t_{r-2}) + t_r - t_{r-1}) = q^r * t_1 + q^{r-1} * (t_2 - t_1) + \dots + q * (t_r - t_{r-1})$$

$$A_r = \sum_{i=1}^r q^{r-i+1} * (t_i - t_{i-1})$$

avec q le facteur de rajeunissement.

q = 0 : rajeunissement complet (équivalent à un processus RP)

q = 1 : absence de rajeunissement (équivalent à un processus NHPP)



La fonction de répartition correspondante est :

$$F'(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{A_r}{\sigma}\right)^\beta - \left(\frac{A_r + t - t_r}{\sigma}\right)^\beta\right]$$

Et celle de la densité de probabilité est :

$$f'(t) = \beta(A_r + t - t_r)^{\beta-1} / \sigma^\beta \exp\left[-\left(\frac{A_r}{\sigma}\right)^\beta - \left(\frac{A_r + t - t_r}{\sigma}\right)^\beta\right]$$

L'ajustement de la loi peut s'effectuer de la même manière que précédemment à partir de l'expression de la densité de probabilité.

## Processus de maintenance GRP 2

Ajustement		Weibull
Bêta :		1,66
Sigma :		426,39
q :		1,00

N° de panne	t(hr)	Durée de fonctionnement	Age virtuel	Densité de probabilité (logarithmes)
1	243	243	243	-6,31311211
2	360	117	360	-6,02236289
3	463	103	463	-5,88680433
4	552	89	552	-5,7667371
5	852	300	852	-6,71223437
6	1320	467	1320	-8,16451474
7	1464	145	1464	-5,96452887
8	1543	78	1543	-5,40178674
9	1930	387	1930	-8,35240919
10	1956	27	1956	-4,82564984
11	2101	145	2101	-6,07118423
12	2219	118	2219	-5,79407359
13	2257	38	2257	-4,89348959
14	2331	74	2331	-5,3000978
15	2337	6	2337	-4,50186858
16	2339	3	2339	-4,4587774
17	2370	30	2370	-4,78068846
18	2481	112	2481	-5,75347525
19	2523	42	2523	-4,89964295
20	2594	71	2594	-5,26355104
				-115,126989 Max



Ajustement  
GRP\_2.xls (18 Ko)

On constate qu'avec les données fournies, le coefficient q vient en limite de son domaine (la maintenance a un effet de vieillissement et non pas de rajeunissement par rapport à l'âge virtuel).

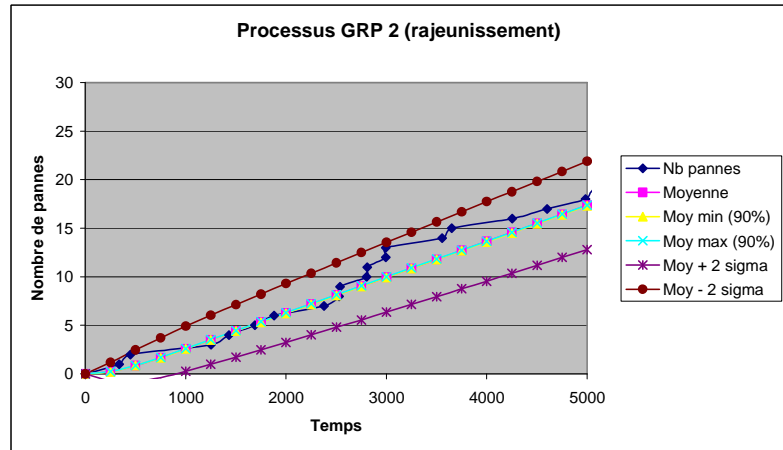
La fonction inverse de la fonction de répartition est alors :

$$t = t_r + \sigma \left[ -\ln(1 - F'(t)) + \left(\frac{A_r}{\sigma}\right)^\beta \right]^{1/\beta} - A_r$$

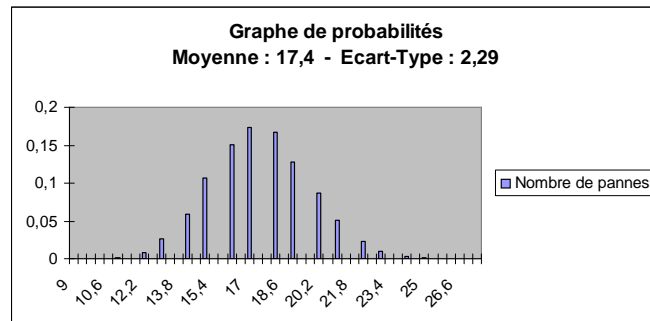
## Processus de maintenance GRP 2

Bêta : 2  
Sigma : 500  
q : 0,5

T	Age virtuel	Nb pannes
0	0	0
336	168	1
447	140	2
1251	472	3
1429	325	4
1688	292	5
1881	243	6
2379	370	7
2529	260	8
2536	133	9
2804	200	10
2809	103	11
2992	143	12
2994	72	13
3554	316	14
3651	207	15
4253	404	16
4600	376	17
4982	379	18
5072	234	19
5523	343	20
5524	172	21
5547	97	22
5725	138	23
6523	468	24
6680	312	25
6887	260	26
6964	169	27
7068	136	28
7332	200	29
7607	237	30
7824	227	31
8016	210	32
8050	122	33
8362	217	34
8585	220	35
8624	129	36
8801	153	37
9387	369	38



Nombre de pannes avant 5000 heures : 18



GRP2.xls (83 Ko)

Afin de valider les modèles d'ajustement et de simulation, les paramètres initiaux peuvent être retrouvés par ajustement à partir de valeurs simulées (200 valeurs environ) :

## Processus de maintenance GRP 2

Ajustement Weibull

Bêta : 2,13  
Sigma : 523,64  
q : 0,53

N° de panne	t(hr)	Durée de fonctionnement	Age virtuel	Densité de probabilité (logarithmes)
1	561	561	300	-6,58254864
2	662	102	215	-6,06717449
3	778	115	177	-6,25022157
4	912	134	166	-6,32406909
5	1407	495	354	-6,79641983
6	1531	125	256	-5,99721766
7	1915	384	342	-6,59321524
8	1961	45	207	-5,96644382
9	2107	146	189	-6,24235221
10	2526	419	325	-6,59542749
11	2692	167	263	-6,08696065
12	3094	402	356	-6,66744369
13	3235	141	266	-6,01876929
14	3713	477	398	-6,98040961
15	3856	144	290	-5,98319561
16	4113	257	292	-6,26714011
17	4267	154	239	-6,10706708
18	4457	190	229	-6,19553572
19	4944	488	384	-6,93001783
20	5097	153	287	-6,01380561
21	5337	240	282	-6,23238467



Ajustement iRP\_2\_bis.xls (48 K..)



## 4 - Optimisation de la durée d'amortissement

L'optimisation de la durée d'amortissement peut s'effectuer simplement en couplant le modèle de simulation du processus de maintenance, ajusté à partir du REX, à un outil d'optimisation.

Le critère d'optimisation est alors le coût horaire calculé en fonction du nombre de pannes survenues pendant la période de renouvellement du matériel.

### Remarques :

Les ajustements présentés ici nécessitent l'emploi d'un outil ayant une réelle capacité à trouver l'optimum global d'une fonction à paramètres multiples. L'outil GEN CAB utilisé couple une méthode globale (les algorithmes génétiques) à une méthode locale (le simplexe).

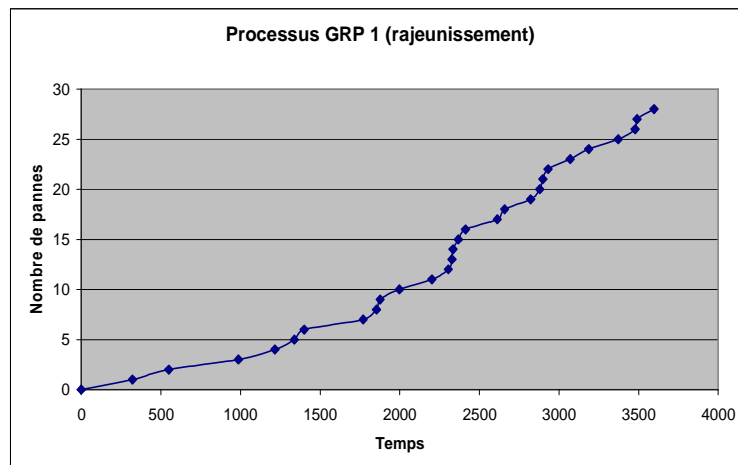
Le couplage entre un outil d'optimisation et de simulation de Monte-Carlo est très pénalisant en temps de calcul. Aussi un algorithme original de couplage a-t-il été implanté entre les outils SIM CAB et GEN CAB. Dans cet exemple à 2000 simulations par évaluation, il permet de diviser cette durée par 16 environ.

Ces mêmes traitements peuvent être réalisés à partir de modèles regroupant la maintenance corrective et préventive.

### Optimisation processus de maintenance GRP 1

Bêta :	2,09
Sigma :	329,85
q :	0,23

T	Nb pannes
0	0
322	1
550	2
986	3
1216	4
1339	5
1400	6
1770	7
1854	8
1877	9
1998	10
2202	11
2305	12
2328	13
2334	14
2367	15
2413	16
2612	17
2659	18
2823	19
2880	20
2898	21
2931	22
3070	23
3187	24
3372	25



T <sub>remplacement</sub> :	2065,73	
Nombre de pannes avant T <sub>remplacement</sub> :	10	13,36
		Moyenne sur 2000 simulations
Coût / heure :	0,000968	0,001131



Optimisation.xls (33 Ko)