TP SdF N° 24

Modèle de BERTHOLON et modèle de vieillissement à 3 phases

Utilisé dans le domaine ferroviaire, le modèle de BERTHOLON[1] est un modèle de vieillissement à 4 paramètres qui permet de prendre en compte deux phases caractéristiques de la vie des produits, la première à taux de défaillance constant et la seconde à taux croissant, soit la deuxième et la troisième partie de la courbe en baignoire modélisées respectivement par une exponentielle et une Weibull.

$$R(t) = \exp(-\lambda t)*\exp(-[\max(0,t-T)/\eta]^{\beta})$$

Relativement simple, ce modèle est susceptible d'être plus largement utilisé à l'avenir pour caractériser la fiabilité des composants électroniques dont l'intégration croissante devrait conduire à des limitations en durée de vie de plus en plus sévère.

L'objet de ce TP est d'ajuster les paramètres de ce modèle à partir de données de retour d'expérience qui seront, ici, préalablement simulées.

Un modèle plus complet à 7 paramètres sera ensuite proposé pour caractériser les trois phases de la courbe en baignoire puis ajusté de la même manière que le précédent.

1 - Modèle de BERTHOLON

1.1 – Simuler 100 valeurs du modèle de BERTHOLON (λ=1,00E-05; β=2 ; η=2000 ; T=10000).

1.2 – Retouver approximativement la valeurs des paramètres du modèle en effectuant un ajustement à partir des 100 valeurs simulées.

2 - Modèle de vieillissement à 3 phases

1.1 – Proposer un modèle plus complet à 7 paramètres pour caractériser les trois phases de la courbe en baignoire

1.2 – Simuler 100 valeurs de ce modèle pour une configuration de ses paramètres.

1.3 – Retouver approximativement cette configuration de paramètres du modèle en effectuant un ajustement à partir des 100 valeurs simulées.

---

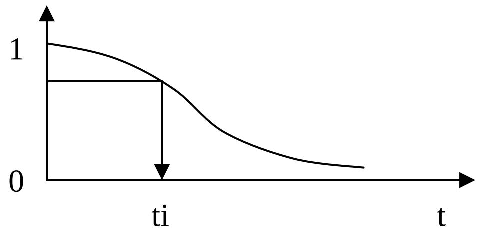
[1] Ziani R., Antoni M., Modélisation du vieillissement des appareils de signalisation par le modèle de BERTHOLON et optimisation de la maintenance, lambda mu 16, 7-9 octobre 2008, Avignon.

1 - Modèle de BERTHOLON

$$R(t) = \exp(-\lambda t)*\exp(-[\max(0,t-T)/\eta]^{\beta})$$

1.1 – Simulation du modèle de Bertholon

Le modèle de Bertholon correspond à la mise en série de deux blocs, le premier régi par une loi de mortalité exponentielle et le second par une loi de Weibull. L’occurrence de la défaillance est donc la plus faible valeur simulée à partir de ces deux modèles (obtenue en inversant les fonctions de répartition ou de fiabilité pour une valeur tirée aléatoirement entre 0 et 1), soit :



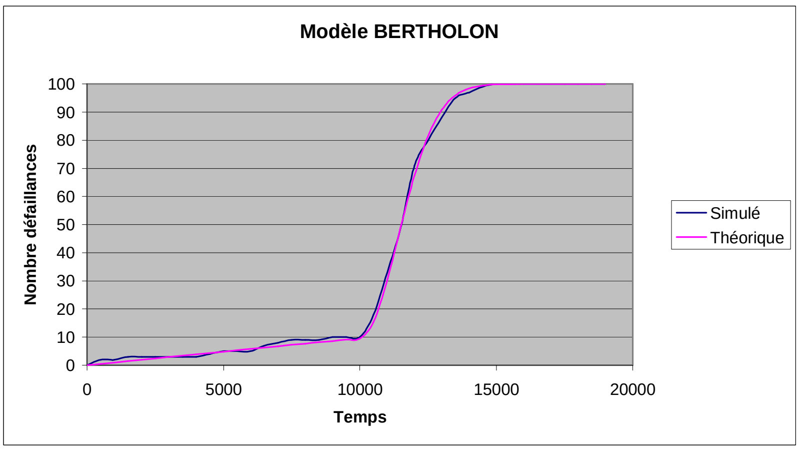
$$\mathrm{MIN}(-\mathrm{LN}[\mathrm{ALEA}()]/\lambda\ ;\ T + \eta*(-\mathrm{LN}[\mathrm{ALEA}()])^{1/\beta}) \quad \text{sous Excel}$$

La figure suivante présente une liste de valeurs simulées de cette manière ainsi que la fonction de répartition correspondante et celle du modèle théorique. Le fichier correspondant est accessible par simple clic sur l’icône Excel.

Modèle de BERTHOLON $R(t) = \exp(-\lambda t)*\exp(-[\max(0, t-T)/\eta]^{\beta})$

Simulation MIN(-LN(ALEA())/Lambda;T+Eta*(-LN(ALEA()))^(1/Bêta))

12832
182
12370
12717
11219
12045
11515
11208
4875
6783
13304
10221
13753
11239
11890
11483
11622
12485
11892
10965
6084
10657
12680
6355
14030
10306
13533
11707
12015
10924



Lambda :	1,00E-05
Bêta :	2
Eta :	2000
T :	10000

T	Fréquence	N(t) simulé	R(T)	N(t) théorique
0	0	0	1	0
500	2	2	0,99501248	0,498752081
1000	0	2	0,99004983	0,995016625
1500	1	3	0,98511194	1,48880604
2000	0	3	0,98019867	1,980132669

Simulation
3ertholon.xls (26 K..

1.2 – Ajustement du modèle de Bertholon

L’ajustement peut s’effectuer à partir de données opérationnelles (simulées dans cet exemple) au moyen d’un outil d’optimisation par la méthode du maximum de vraisemblance (voir TP 20). Cette méthode consiste à rechercher le modèle théorique qui donne la densité de probabilité maximale pour les valeurs expérimentales (maximum du produit des densités ou de la somme des logarithmes des densités) :

La densité de la loi de Bertholon peut s’exprimer de la manière suivante :

$$f(t) = \lambda(t) * R(t)$$

avec $\lambda(t) = \lambda + SI(t > T \,;\, \beta*(t-T)^{\beta-1}/\eta^{\beta} \,;\, 0)$

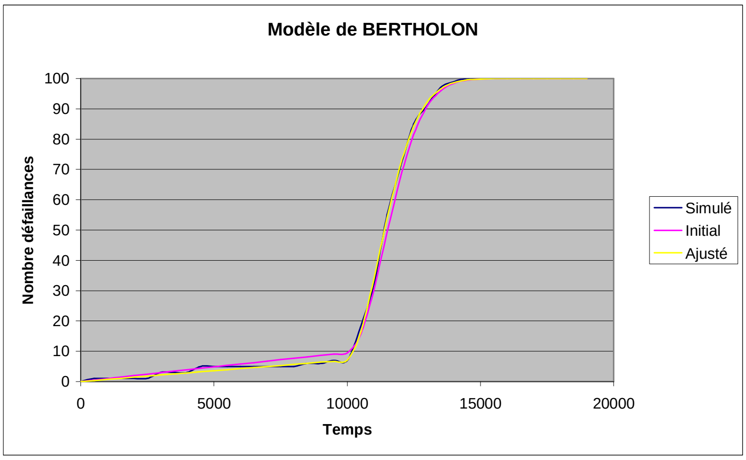
et $R(t) = \exp(-\lambda t)*\exp(-[\max(0,t-T)/\eta]^{\beta})$

La figure suivante présente un ajustement du modèle réalisé à partir de 100 valeurs préalablement simulées. On retrouve approximativement les valeurs des paramètres du modèle utilisé pour la simulation.

Modèle de BERTHOLON - Ajustement à partir de 100 valeurs simulées

λ(t) = Lambda+SI(t>T;Bêta*((t-T)^(Bêta-1))/Eta^Bêta;0)
R(t) = exp(-λt)*exp(-[max(0, t-T)/η]^β)
f(t) = λ(t)*R(t)

Valeurs simulées	Lambda	R(t)	LN(f(t))
10503	0,000349677	0,838708505	-8,134392409
11717	0,000946266	0,378091446	-7,935605935
11290	0,000747039	0,542865757	-7,810286412
11810	0,000988673	0,345548304	-7,981769399
11865	0,001013198	0,327328131	-8,011435451
10720	0,000464344	0,767975416	-7,938882017
11123	0,000666228	0,611241014	-7,806142027
2900	7,30849E-06	0,979027915	-11,84766864
11570	0,000878485	0,43243491	-7,87563544
12111	0,00112384	0,251411265	-8,171669178
11472	0,000832679	0,4704039	-7,845025738
11442	0,000818708	0,482128741	-7,837326914
11397	0,00079772	0,49983564	-7,827228875
12203	0,001164337	0,226434094	-8,240905096
10309	0,000240401	0,888387469	-8,451547586
19	7,30849E-06	0,999862406	-11,82661112
10646	0,000425943	0,793551587	-7,992442716
10428	0,000308224	0,85975487	-8,235792266
11017	0,000614636	0,653906526	-7,819271397
11837	0,001000777	0,336498463	-7,996140429
13694	0,001796656	0,024739626	-10,02117701
11122	0,000665799	0,611600343	-7,806198765
12074	0,001107112	0,262183572	-8,144710414
10237	0,000198265	0,902388997	-8,628615461
11322	0,000762097	0,530059191	-7,81420289
10925	0,000568669	0,6907239	-7,842227188
11543	0,000865733	0,442921183	-7,866297055
11027	0,000619573	0,64987704	-7,8174521
10288	0,000228477	0,89264876	-8,497637317
11510	0,00085045	0,455578514	-7,85593192
10792	0,000501715	0,741493235	-7,89656845
10744	0,000476738	0,759357686	-7,923826057
11406	0,000801833	0,496358438	-7,829067617



LN Vraisemblance : -850,829668

	Ajusté	Initial
Lambda :	7,31E-06	1,00E-05
Bêta :	1,85315788	2
Eta :	1867,61618	2000
T :	9966,78908	10000

T	R(T) initial	N(t) intial	Fréquence	N(t) simulé	R(T) ajusté	N(t) ajusté
0	1	0	0	0	1	0
500	0,99501248	0,49875208	1	1	0,99635242	0,36475777
1000	0,99004983	0,99501663	0	1	0,99271815	0,72818505

Ajustement
Bertholon.xls (39 K..

Remarque : cet ajustement peut également s’effectuer à partir de données censurées en multipliant le produit des densités, pour les durées avant défaillance, par celui des fiabilités, pour les durées avant censure.

2 - Modèle de vieillissement à 3 phases

Le modèle de Bertholon peut être généralisé en un modèle à 7 paramètres caractérisant les trois phases de la courbe en baignoire, soit une première Weibull à $\beta < 1$ pour la phase de jeunesse, une exponentielle pour la phase à taux constant et une seconde Weibull à $\beta > 1$ pour la phase de vieillissement à taux croissant.

2.1 – Simulation du modèle de vieillissement à 3 phases

Ce modèle correspond à la mise en série de trois blocs, le premier régi par une loi de mortalité de Weibull, intitiée à t = 0 ($\gamma = 0$) et limitée à une certaine durée, et les deux autres étant ceux du modèle de Bertholon. L'occurrence de la défaillance peut alors être simulée de la manière suivante :

$$Ti = \eta_1 * (-LN[ALEA()])^{1/\beta 1}$$

$$T = si(Ti<T_1\ ;\ Ti\ ;\ MIN(\ -LN[ALEA()]/\lambda\ ;\ \gamma_2 + \eta_2 * (-LN[ALEA()])^{1/\beta 2}\ )$$

La figure suivante présente des résultats de simulation de ce modèle ainsi que les fonctions de répartition expérimentale et théorique..

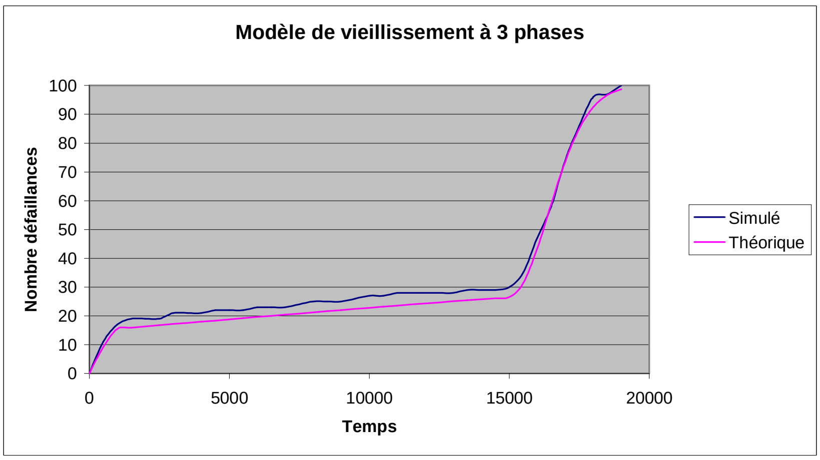
Modèle de vieillissement à 3 phases

$$R(t) = \exp(-[\min(t\ ;T_1)/\eta_1]^{\beta 1}) * \exp(-\lambda t) * \exp(-[\max(0\ ;\ t-\gamma_2)/\eta_2]^{\beta 2})$$

Ti = η_1*(-LN(ALEA()))^(1/β1)
T = si(Ti<T1;Ti;MIN(-LN(ALEA())/λ;γ2+η2*(-LN(ALEA()))^(1/β2)))

Simulation

Ti	T
871	871
9364	9665
6199	16872
3680	15894
1394	7168
2199	15809
18763	17661
15723	16597
4927	16192
5140	15559
27761	16275
498	498
3054	17251
1031	17322
58637	16874
44816	15689
4363	17661
42177	18869
1417	10878
4390	16288
1304	15469
78	78
172	172
928	928
9	9
1590	16043
2388	17704
59953	9040
4560	16568
6965	16920
3258	15354
2127	17341



Bêta 1 :	0,8
Eta 1 :	10000
T 1 :	1000
Lambda :	1,00E-05
Bêta 2 :	2
Eta 2 :	2000
Gamma 2 :	15000

T	Fréquence	N(t) simulé	R(T)	N(t) théorique
0	0	0	1	0
500	11	11	0,90843839	9,156161148
1000	6	17	0,84494029	15,5059712
1500	2	19	0,84072613	15,92738693
2000	0	19	0,83653299	16,34670084
2500	0	19	0,83236077	16,76392341
3000	2	21	0,82820935	17,17906507

Simulation modèle 3 phases.xls...

2.2 – Ajustement du modèle de vieillissement à 3 phases

L'ajustement s'effectue de la même manière que précédemment avec pour expression de la densité :

$$f(t) = \lambda(t) * R(t)$$

avec $\lambda(t) = \text{si}(\ t<T_1\ ;\ \beta_1 * t^{\beta 1-1} / \eta_1^{\beta 1}\ ;\ 0) + \lambda + \text{si}\ (t>\gamma_2\ ;\ \beta_2 * (t-\gamma_2)^{\beta 2-1} / \eta_2^{\beta 2}\ ;\ 0)$

et $R(t) = \exp(-[\min(t\ ;T_1)/\eta_1]^{\beta 1}) * \exp(-\lambda t) * \exp(-[\max(0\ ;\ t-\gamma_2)/\eta_2]^{\beta 2})$

A nouveau, on retrouve approximativement les valeurs des paramètres du modèle utilisé pour la simulation.

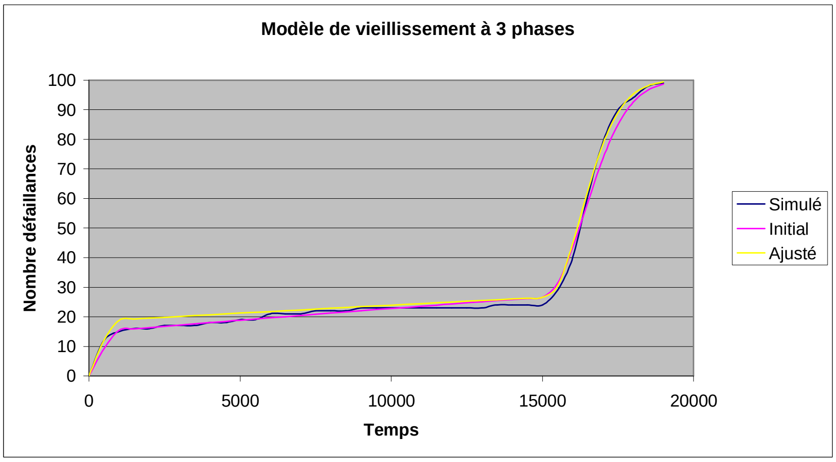
Modèle de vieillissement à 3 phases - Ajustement à partir de 100 valeurs simulées

$\lambda(t) = SI(t<T_1\ ;\ \beta_1*t^{\beta 1-1}/\eta_1^{\beta 1}\ ;\ 0) + \lambda + SI(t>\gamma_2\ ;\ \beta_2*(t-\gamma_2)^{\beta 2-1}/\eta_2^{\beta 2}\ ;\ 0)$

$R(t) = \exp(-[\min(t\ ;T_1)/\eta_1]^{\beta 1}) * \exp(-\lambda t) * \exp(-[\max(0\ ;\ t-\gamma_2)/\eta_2]^{\beta 2})$

$f(t) = \lambda(t)*R(t)$

Valeurs simulées	λ(t)	R(t)	LN(f(t))
17879	0,001704401	0,059570533	-9,19513576
16602	0,000999617	0,337505248	-7,994312984
2087	6,9998E-06	0,804133105	-12,08762015
17318	0,001403475	0,142611235	-8,516436708
16125	0,000711457	0,508096721	-7,925279458
16607	0,001002714	0,335720031	-7,996522533
17864	0,00169631	0,061148021	-9,173757844
16905	0,001174247	0,242631291	-8,163340916
667	0,000165624	0,854848687	-8,862622444
41	0,000377753	0,978059026	-7,903453975
16136	0,000718686	0,503913251	-7,92343735
15801	0,000501821	0,618770747	-8,077286558
16981	0,001216923	0,221661673	-8,218032907
17049	0,00125511	0,203767923	-8,271305901
16258	0,000793898	0,459619173	-7,915912875
16931	0,00118841	0,235561762	-8,180921388
115	0,000277752	0,95533554	-8,234476162
32	0,000407678	0,981607206	-7,82359751
16382	0,000869291	0,41449236	-7,928533677
16935	0,001190697	0,234430178	-8,183813884
16634	0,001018478	0,326680225	-8,008219202
15707	0,000438571	0,646443389	-8,16825883
17217	0,00134828	0,16377001	-8,418218072
16422	0,000893024	0,400289051	-7,936465606
17027	0,001242582	0,209544912	-8,253380832
18528	0,002039838	0,017651354	-10,23182777
16136	0,000718632	0,50394438	-7,923450286
5713	6,9998E-06	0,783983496	-12,11299699
16701	0,00105736	0,304742795	-8,04026689
17687	0,001602829	0,081818034	-8,939242833
16459	0,000915301	0,387002665	-7,945581457
16619	0,001009727	0,331689185	-8,001632593
3671	6,9998E-06	0,795271263	-12,0987017
15560	0,000333888	0,684503194	-8,383766233
17474	0,001488638	0,113699427	-8,684090913



LN Vraisemblance : -866,32265

	Ajusté	Initial
Bêta 1 :	6,95E-01	0,8
Eta 1 :	9999,9996	10000
T 1 :	1012,45421	1000
Lambda :	6,9998E-06	1,00E-05
Bêta 2 :	1,8351466	2
Eta 2 :	1638,15235	2000
Gamma 2 :	15184,7033	15000

T	R(T) initial	N(t) intial	Fréquence	N(t) simulé	R(T) ajusté	N(t) ajusté
0	1	0	0	0	1	0
500	0,90843839	9,15616115	12	12	0,87984013	12,0159869
1000	0,84494029	15,5059712	3	15	0,81169079	18,8309205

Ajustement modèle
3 phases.xls...

Remarque : l'ajustement du modèle de Bertholon ou de celui à 3 phases ne peut se suffire d'une méthode d'optimisation locale (simplexe ou pseudo gradient) et nécessite l'emploi d'un outil d'optimisation globale.