

TP SdF N° 25

Modélisation et optimisation de la maintenance préventive et corrective d'un matériel soumis à usure

Ce TP complète le TP N° 22 sur la modélisation et l'optimisation de la maintenance d'un matériel réparable en introduisant des actions de maintenance préventive.

Il porte plus particulièrement sur les modèles de Jack¹ pour lesquels une action de maintenance a un effet de rajeunissement différent selon qu'elle est de nature corrective ou préventive.

1 – Modèles de Jack

1.1 - Présenter les modèles de Jack de type 1 et 2²

1.2 - En considérant que la maintenance préventive est périodique et en modélisant la fiabilité du matériel par une loi de Weibull, simuler 200 actions successives de maintenance préventive ou corrective avec les modèles de Jack type 1 et 2, après avoir choisi une configuration de leurs paramètres.

1.3 – Tenter de retrouver cette configuration de paramètres en ajustant les deux modèles par la méthode du maximum de vraisemblance à partir des données simulées.

2 - Optimisation de la maintenance

2.1 - Après avoir montré qu'une maintenance périodique n'est pas optimale pour un matériel soumis à usure, proposer d'autres stratégies de maintenance préventive.

2.1. – Optimiser l'une de ces stratégies et la durée d'amortissement du matériel.

¹ Jack N., *Analysing event data from a repairable machine subject to imperfect preventive maintenance. Quality and Reliability engineering international, Vol 13, 183-196, 1997*

² Jack N., *Age-reduction models for imperfect maintenance. IMA 9, pp. 347-354, 1998*

1 – Modèles de Jack

Jack propose deux modèles de vieillissement dans lesquels la maintenance a un certain effet de rajeunissement de l'équipement. Cet effet est plus important dans le cas d'une action de maintenance préventive (changement de plusieurs pièces d'usure) que corrective (changement de l'unique pièce en panne).

1.1 Présentation des modèles

a) Jack type 1

- A la fin d'une action de maintenance corrective, l'âge virtuel de l'équipement est égal à celui qu'il avait lors de la précédente action de maintenance (corrective ou préventive) plus une proportion ρ_c de la durée depuis écoulée.

- A la fin d'une action de maintenance préventive, l'âge virtuel de l'équipement est égal à celui qu'il avait lors de la précédente action de maintenance préventive plus une proportion ρ_p de la durée depuis écoulée.

L'âge virtuel à l'instant courant est donc égal à : $A(t) = t - \rho_p t_p - \rho_c \max(0; t_c - t_p)$ avec t_p l'instant de la dernière action de maintenance préventive et t_c celui de la dernière action de maintenance corrective ($0 \leq \rho_p \leq \rho_c \leq 1$ égal à 0 dans le cas d'un remplacement et à 1 en cas d'absence de rajeunissement).

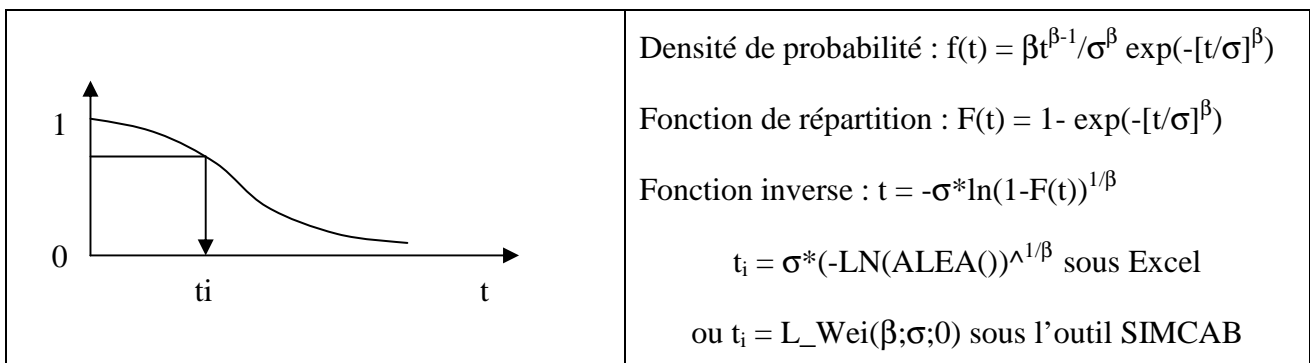
b) Jack type 2

- A la fin d'une action de maintenance corrective, l'âge virtuel de l'équipement est égal à celui qu'il avait juste avant cette action multiplié par une proportion ρ_c .

- A la fin d'une action de maintenance préventive, l'âge virtuel de l'équipement est égal à celui qu'il avait juste avant cette action multiplié par une proportion ρ_p .

1.2 – Simulation des modèles de Jack

Une durée de fonctionnement d'un équipement soumis à usure peut être simulée en tirant une valeur aléatoire entre 0 et 1 et en lui appliquant l'inverse de la fonction de répartition d'une loi de Weibull (avec $\beta > 1$) :



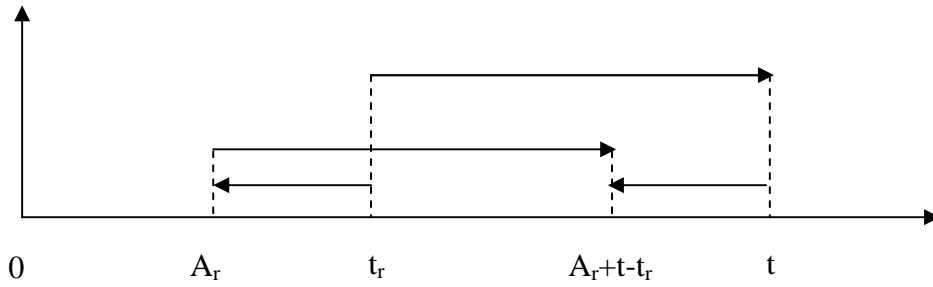
Si la maintenance n'a pas d'effet sur le vieillissement de l'équipement, la probabilité qu'il soit en panne à t , sachant qu'il a été réparé à t_r est égale à :

$$[F(t) - F(t_r)] / R(t_r) = (1 - R(t) - 1 + R(t_r)) / R(t_r) = 1 - R(t) / R(t_r)$$

La fonction de répartition correspondante est : $F'(t) = 1 - \exp[-((t_r/\sigma)^\beta - (t/\sigma)^\beta)]$

Et celle de la densité de probabilité est : $f'(t) = \beta t^{\beta-1} / \sigma^\beta \exp[-((t_r/\sigma)^\beta - (t/\sigma)^\beta)]$

Si la réparation a pour effet de rajeunir l'équipement à un âge virtuel A_r



La fonction de répartition devient : $F'(t) = 1 - \exp[(A_r/\sigma)^\beta - ([A_r+t-t_r]/\sigma)^\beta]$

Et celle de la densité de probabilité : $f'(t) = \beta(A_r+t-t_r)^{\beta-1}/\sigma^\beta \exp[(A_r/\sigma)^\beta - ([A_r+t-t_r]/\sigma)^\beta]$

La fonction inverse de la fonction de répartition est alors : $t = t_r + \sigma[-\ln(1-F'(t)) + (A_r/\sigma)^\beta]^{1/\beta} - A_r$

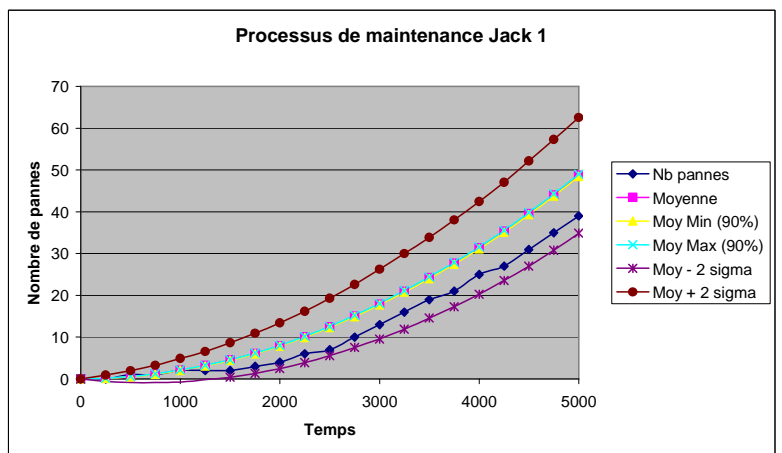
La durée de fonctionnement peut être simulée par : $t_i = t_r + \sigma[-\text{LN}(\text{ALEA}()) + (A_r/\sigma)^\beta]^{1/\beta} - A_r$ sous Excel

Les processus de maintenance de type Jack 1 et Jack 2 sont simulés ci-après pour une certaine configuration de leurs paramètres (4000 simulations réalisées au moyen de l'outil SIMCAB). Les fichiers Excel correspondants sont disponibles par double clic de la souris sur l'icône correspondant.

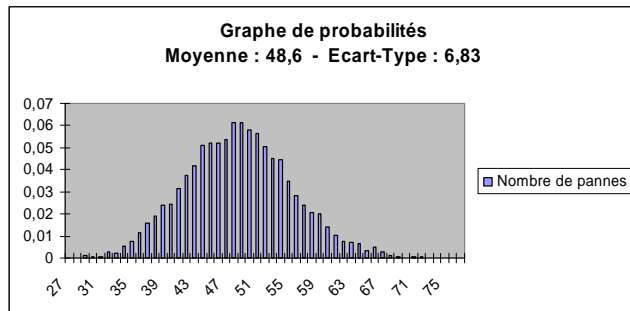
Modèle de Jack 1

Bêta :	2
Sigma :	600
pc :	0.7
pp :	0.3
Période maintenance :	300

Date de panne	Maintenance préventive	Panne effective	Age virtuel	T	Nb pannes
0			0	0	0
601	300		210	371	1
371		371	231	927	2
724	600		420	1649	3
1237	900		630	1768	4
927		927	638	2053	5
1510	1200		840	2160	6
1510	1500		1050	2311	7
1649		1649	1095	2658	8
1768		1768	1130	2680	9
1990	1800		1260	2730	10
2053		2053	1336	2904	11
2273	2100		1470	2948	12
2160		2160	1488	2974	13
2311		2311	1533	3036	14
2450	2400		1680	3080	15
2658		2658	1757	3136	16
2680		2680	1764	3292	17
2899	2700		1890	3436	18
2730		2730	1899	3463	19
2904		2904	1951	3600	20
2948		2948	1964	3622	21
2974		2974	1972	3761	22
3135	3000		2100	3856	23
3036		3036	2111	3921	24
3080		3080	2124	3988	25
3136		3136	2141	4152	26
3292		3292	2187	4167	27
3322	3300		2310	4281	28
3436		3436	2351	4286	29
3463		3463	2359	4337	30



Nombre de pannes avant 5000 heures : 39

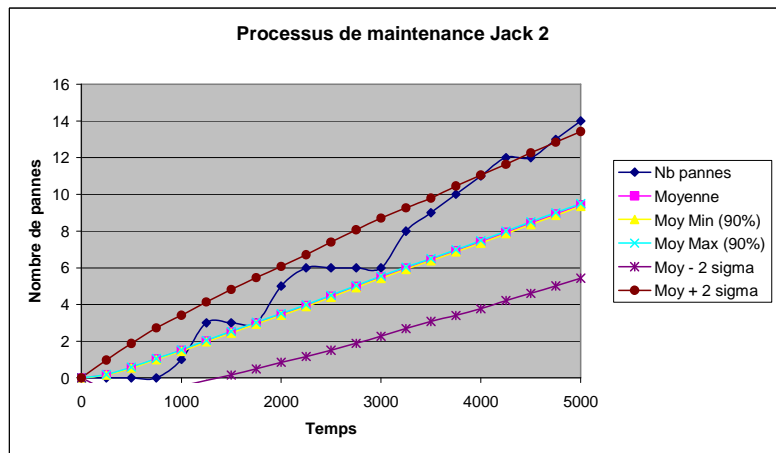


Feuille de calcul
Microsoft Excel

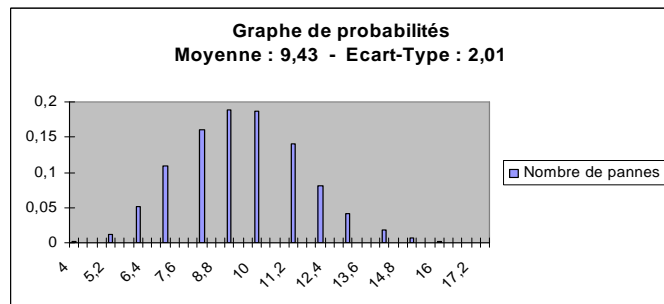
Modèle de Jack 2

Bêta :	2
Sigma :	600
pc :	0,7
pp :	0,3
Période maintenance :	300

Date de panne	Maintenance préventive	Panne effective	Age virtuel	T	Nb pannes
0			0	0	0
425	300		210	892	1
671	600		357	1183	2
892		892	195	1192	3
982			142	1896	4
1183		1183	127	1987	5
1192		1192	41	2197	6
1692	1200		34	3052	7
1649	1500		234	3103	8
1942	1800		374	3410	9
1896		1896	141	3706	10
1987		1987	70	3989	11
2333	2100		128	4178	12
2197		2197	67	4660	13
2737	2400		189	4756	14
3041	2700		343	5456	15
3187	3000		450	5979	16
3052		3052	150	6114	17
3103		3103	60	6653	18
3511	3300		180	6721	19
3410		3410	87	7128	20
4264	3600		194	8054	21
3706		3706	90	8683	22
3995	3900		199	9243	23
3989		3989	86	9454	24
4178		4178	83	9490	25
4466	4200		73	10330	26
4703	4500		261	10787	27
4660		4660	126	12344	28
4756		4756	67	12942	29
5503	4800		77	13445	30



Nombre de pannes avant heures :



Feuille de calcul
Microsoft Excel

1.3 - Ajustement des modèles de Jack

A partir de données de retour d'expérience, l'ajustement d'une loi de probabilité peut s'effectuer au moyen d'un outil d'optimisation par la méthode du maximum de vraisemblance. Cette méthode consiste à rechercher les paramètres du modèle théorique qui donnent la densité de probabilité maximale pour les instants de défaillance (maximum du produit des densités ou de la somme des logarithmes des densités). L'expression de la densité de probabilité est :

$$f'(t) = \beta(A_r + t - t_r)^{\beta-1} / \sigma^\beta \exp[-(A_r/\sigma)^\beta - ([A_r + t - t_r]/\sigma)^\beta]$$

Les données étant censurées par les actions de maintenance préventive, il est nécessaire de modifier la vraisemblance en ajoutant à la somme des logarithmes des densités, aux instants de défaillance, la somme des logarithmes des fiabilités, aux instants des actions de maintenance préventive. L'expression de la fiabilité est :

$$R(t) = 1 - F'(t) = \exp[-(A_r/\sigma)^\beta - ([A_r + t - t_r]/\sigma)^\beta]$$

Effectué à partir de 200 valeurs simulées d'actions successives de maintenance préventive ou corrective, l'ajustement permet de retrouver approximativement la configuration des paramètres utilisée pour la simulation dans le cas du modèle Jack 2 et dans une moindre mesure dans le cas du modèle Jack 1.

En effet, ce dernier modèle présente le défaut intrinsèque d'engendrer une forte dépendance entre le paramètre ρ_p et le paramètre Sigma de la loi de Weibull ; le paramètre ρ_c n'ayant que très peu d'effet sur le processus de maintenance.

Processus de maintenance Jack 1

	Ajustement	Initial
Bêta :	2,13	2
Sigma :	763,65	600
pc :	1,00	0,7
pp :	0,20	0,3

							$\Sigma \text{LN V}$
							-758,606434
N° d'action de maintenance	Préventive (hr)	Corrective (hr)	Age virtuel	Durée de fonctionnement	Densité de probabilité (logarithmes)	Fiabilité (logarithmes)	LN Variance
1	300		240	300	-7,07401411	-0,13684888	-0,13684888
2		422	240	122	-6,84529119	-0,11861098	-6,84529119
3	600		480	178	-6,75508742	-0,19236861	-0,19236861
4	900		719	300	-6,53277224	-0,67337878	-0,67337878
5		995	719	95	-6,07623602	-0,26610722	-6,07623602
6	1200		959	205	-6,28811167	-0,62095777	-0,62095777
7	1500		1199	300	-6,59305783	-1,27477975	-1,27477975
8		1713	1199	213	-6,27753926	-1,08867862	-6,27753926
9		1738	1199	25	-5,4669132	-0,11642948	-5,4669132
10	1800		1439	62	-5,61252952	-0,29581136	-0,29581136

Processus de maintenance Jack 2

	Ajustement	Initial
Bêta :	2,21	2
Sigma :	623,14	600
pc :	0,70	0,7
pp :	0,26	0,3

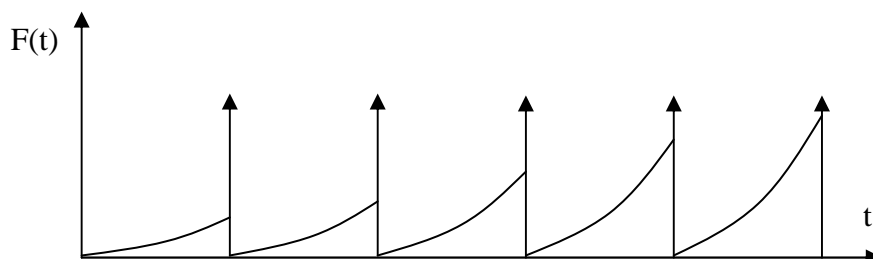
							$\Sigma \text{LN V}$
							-489,74346
N° d'action de maintenance	Préventive (hr)	Corrective (hr)	Age virtuel	Durée de fonctionnement	Densité de probabilité (logarithmes)	Fiabilité (logarithmes)	LN Variance
1		152	45	152	-7,39103008	-0,04442739	-7,3910301
2	300		143	148	-7,13331614	-0,0717825	-0,0717825
3		303	43	3	-7,39710408	-0,00176691	-7,3971041
4	600		253	297	-6,63371037	-0,25992473	-0,2599247
5	900		411	300	-6,41798599	-0,63176674	-0,6317667
6		1198	210	298	-6,41799817	-0,93328402	-6,4179982
7	1200		157	2	-6,95189905	-0,00163055	-0,0016306
8	1500		340	300	-6,47336601	-0,45669532	-0,4566953
9	1800		476	300	-6,40821488	-0,79854947	-0,7985495
10		1945	183	145	-6,0865146	-0,43968728	-6,0865146

L'incertitude des résultats de l'ajustement n'est due qu'aux dispersions des données simulées et en aucun cas à l'ajustement (réalisé au moyen de l'outil GEN CAB) qui présente toujours une vraisemblance supérieure à celle obtenue avec la configuration de paramètres ayant permis de générer le jeu de données.

2 - Optimisation de la maintenance

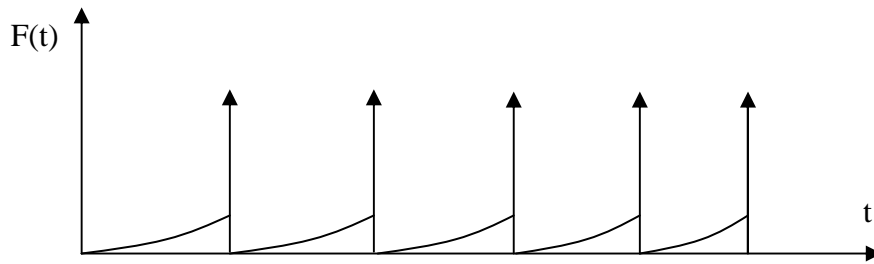
2.1 - Stratégies de maintenance préventive

Dans le cas d'un matériel soumis à usure, une maintenance périodique n'apparaît pas optimale car les actions préventives sont trop fréquentes au début et insuffisantes à la fin du processus.



D'autres stratégies peuvent être envisagées telles que celles proposées-ci après.

a) - La maintenance peut être effectuée de manière à assurer un même niveau de risque α de défaillance entre deux actions de maintenance préventive.

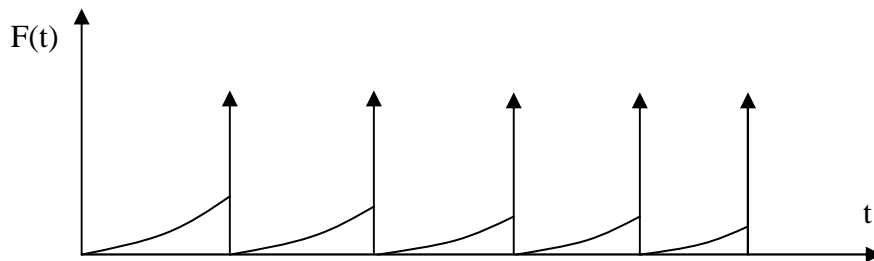


En considérant le coût moyen d'une action préventive (Coût préventive), le coût moyen d'une action corrective (Coût corrective), et le coût de renouvellement du matériel (Coût renouvellement), l'optimisation de la maintenance consiste alors à rechercher la valeur α et la durée d'amortissement du matériel ($T_{\text{amortissement}}$) tels que le coût horaire moyen soit minimisé, soit :

$$(N_p * \text{Coût préventive} + N_c * \text{Coût corrective} + \text{Coût renouvellement}) / T_{\text{amortissement}}$$

avec N_p et N_c le nombre moyen d'actions de maintenance préventive et corrective effectuées pendant la durée d'amortissement du matériel.

b) - La maintenance préventive peut être effectuée de manière à rendre le coût horaire moyen de la maintenance égal à une valeur fixée a priori.



Le risque α_i de défaillance entre deux actions successives de maintenance préventive espacées l'une de l'autre de ΔT_i est tel que :

$$[\alpha_i * \text{Coût corrective} + (1 - \alpha_i) * \text{Coût préventive}] / \Delta T_i = \text{Coût objectif}$$

A la fin de chaque action de maintenance, la date prévue de la prochaine action de maintenance préventive (t_p) se calcule alors en résolvant l'équation :

$$(1 - \exp[(A_r/\sigma)^\beta - ([A_r + t_p - t_r]/\sigma)^\beta]) * (\text{Coût corrective} - \text{Coût préventive}) + \text{Coût préventive} = (t_p - t_r) * \text{Coût objectif}$$

2.2. – Optimisation d’une stratégie de maintenance et de la durée d’amortissement

La première des stratégies proposées a fait l’objet d’une optimisation en couplant un outil d’optimisation et de simulation de Monte-Carlo. Afin de ne pas conduire à des temps de calcul rédhibitoires, un algorithme original de couplage est implanté entre les outils GENCAB et SIMCAB qui permet de diviser la durée de traitement par 16 environ dans cet exemple (2000 simulations par évaluation).

Optimisation de la maintenance (modèle de Jack 2)

Bêta :	2	T amortissement :	28202 heures
Sigma :	600	Risque :	0,32
pc :	0,7		
pp :	0,3		
Coût maintenance préventive :	300		
Coût maintenance corrective :	1000		
Coût renouvellement :	5000		

T	Prochaine maintenance prévue	Prochaine défaillance	Age virtuel	Coût
0	376	133	0	5000
133	427	645	93	1000
427	705	564	116	300
564	803	737	177	1000
737	941	793	245	1000
793	1013	1072	211	1000
1013	1282	1334	129	300
1282	1557	1869	119	300
1557	1833	1787	118	300
1787	1991	1939	244	1000
1939	2129	2179	277	1000
2129	2390	2875	140	300
2390	2665	2808	120	300
2665	2941	3234	118	300
2941	3217	3346	118	300
				Σ Coût /hr 2,47143881

