TP SdF N° 28

Maintenance prédictive (Health monitoring)

Ce TP porte sur la problématique du contrôle d'un processus aléatoire. Il traite de la maintenance d'un système partiellement observable faisant l'objet d'un modèle de Markov caché.

1. Contrôle d'un processus aléatoire

Décrire succinctement les modèles markoviens utilisés pour modéliser des processus aléatoires et décisionnels :

- Chaîne de Markov,
- Processus de décision markovien (MDP),
- Modèles de Markov Caché (MMC),
- Processus généralisés de décision markovien partiellement observables (GPOMDP).

2. Optimisation de la maintenance d'un matériel partiellement observable

Le fonctionnement d'un matériel se caractérise par 4 états discrets allant du bon fonctionnement à la panne via 2 niveaux de dégradation successifs. Ces 2 niveaux de dégradation sont partiellement observables à partir d'un indicateur d'usure à 3 niveaux (faible / moyen / fort) testé en permanence.

2.1. Proposer un modèle de Markov caché à 7 paramètres pour modéliser ce système en considérant 3 taux de transition constant (loi exponentielle) et croissant entre les 4 états du système et des probabilités d'indication d'usure dans les 2 états de dégradation.

2.2. Choisir une configuration de paramètres et simuler le fonctionnement et l'observabilité de 200 matériels.

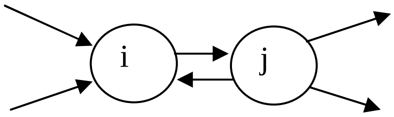
2.3. Ajuster les durées de fonctionnement avec une loi de Weibull et commenter la valeur de β obtenue.

2.4. A partir des données simulées, tenter de retrouver les paramètres du modèle par la méthode du maximum de vraisemblance.

2.5. Proposer une politique de maintenance.

1 – Contrôle d’un processus aléatoire

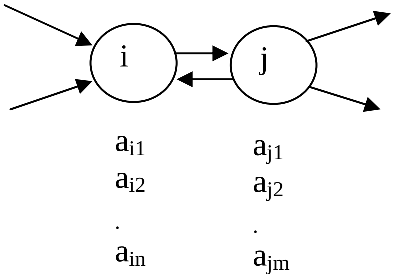
- Chaîne de Markov[1],



Une chaîne de Markov décrit un processus aléatoire entre des états discrets. Un changement d’états ne dépend que de l’état courant (sans mémoire des changements d’états passés) et est régi par un taux de transition constant (loi exponentielle dans les processus homogènes) ou fonction du temps passé dans l’état courant.

- Processus de Décision Markovien (MDP),

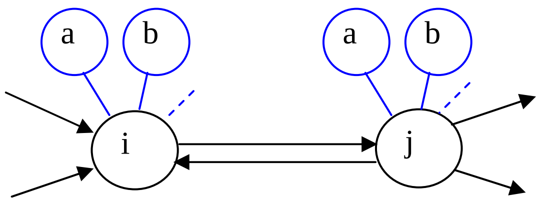
Un processus de décision markovien est une chaîne de Markov à laquelle on ajoute une composante décisionnelle.



Les probabilités de transition entre états (le temps est généralement discrétisé) dépendent des actions prises dans l’état courant. Un couple action/transition est associé à une récompense (service apporté moins le coût de l’action). La politique optimale correspond à la configuration des actions dans chacun des états qui maximise la récompense globale. Cette politique peut être obtenue par la technique de la programmation dynamique, si on connaît a priori toutes les caractéristiques du modèle, ou la méthode de l’apprentissage par renforcement, dans le cas contraire.

- Modèles de Markov Caché (MMC),

Un modèle de Markov décrit un processus de Markov dont les états sont partiellement observables à travers un indicateur probabiliste (celui-ci donne l’information a avec une probabilité Pia quand le système est dans l’état i).



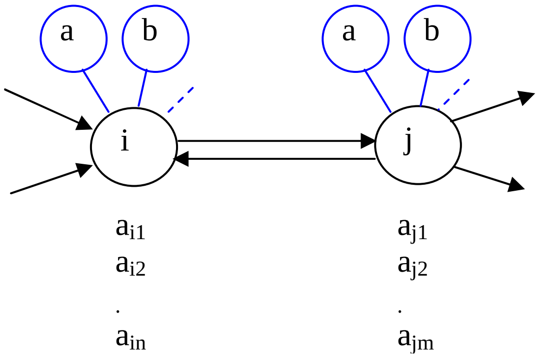
L'algorithme de Viterbi est utilisé pour rechercher la suite de transitions la plus probable à partir d’une séquence d’observation et l'algorithme Forward-Backward, aussi nommé de Baum-Welch, est utilisé pour estimer les paramètres du modèle. Les modèles de Markov cachés sont notamment utilisés en reconnaissance de formes et en traitement automatique du langage naturel.

---

[1] Andrei Markov a publié les premiers résultats sur les chaînes de Markov à espace d'états fini en 1906.

- Processus généralisés de décision markovien partiellement observables (GPOMDP).

Un processus généralisé de décision markovien partiellement observable est un processus de décision markovien caché.



2 – Optimisation de la maintenance d'un matériel partiellement observable

2.1 - Modélisation

Le fonctionnement du matériel se caractérise par 4 états discrets allant du bon fonctionnement (état 1) à la panne (état 4) via 2 niveaux de dégradation successifs (états 3 et 4).

Ces 2 niveaux de dégradation sont partiellement observables à partir d'un indicateur d'usure à 3 niveaux testé en permanence : faible (a), moyen (b) et fort (c).

On suppose qu'il n'y a pas d'usure à l'état neuf et qu'une amélioration de l'indication d'usure entre les états 2 et 3 est possible (ces hypothèses sont évidemment discutables mais la simplicité est recherchée dans cet exemple à des fins didactiques).

Le système peut être modélisé par le modèle de Markov caché à 7 paramètres suivants.

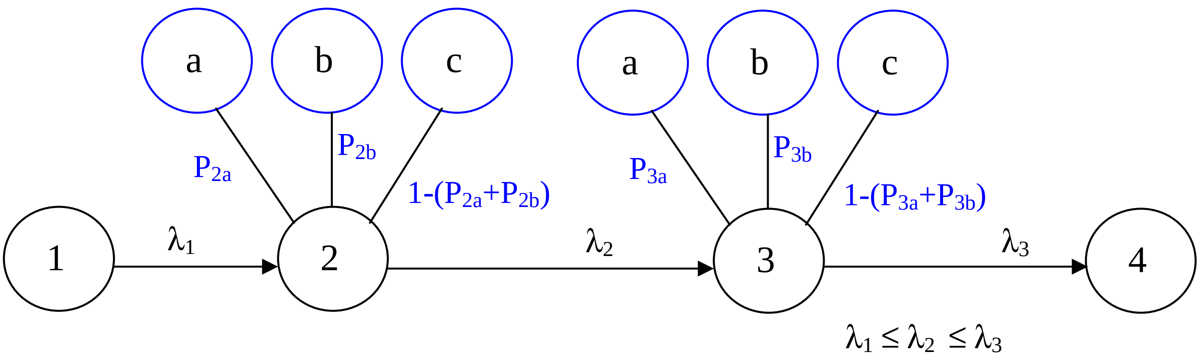


Fig. 1 : Modèle de Markov caché

2.2 - Simulation

On choisit la configuration de paramètres suivants :

$\lambda 1$:1,00E-04 h^{-1}	P2a : 0,8	P3a : 0,1
$\lambda 2$: 3,00E-04 h^{-1}	P2b : 0,15	P3b : 0,3
$\lambda 3$: 1,00E-03 h^{-1}		

Les temps de fonctionnement avant entrée dans les états 2 (T2), 3 (T3) et 4 (T4) peuvent se simuler simplement par tirage d'une valeur aléatoire u entre 0 et 1 (fonction alea() sous Excel) puis application de l'inverse de la fonction $e^{-\lambda t}$:

$$T2 = - \ln(u) / \lambda 1 \quad T3 = T2 - \ln(u) / \lambda 2 \quad T4 = T3 - \ln(u) / \lambda 3$$

De même l'indication d'usure dans les états 2 et 3 peut se simuler par tirage de 2 valeurs aléatoires u_1 et u_2 entre 0 et 1 :

Indication : Si($u_1 < P_{ia}$; « a » ; Si($u_2 < P_{ib} /(1-P_{ia})$; « b » ; « c »))

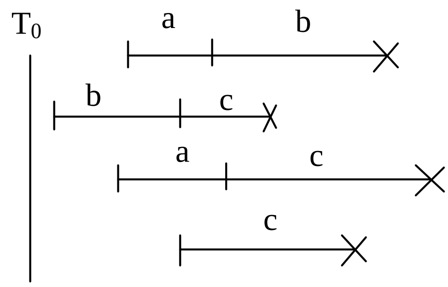


Fig. 2 : Exemple de résultats de simulation

2.3 - Ajustement d'une loi de Weibull

A partir de 200 valeurs simulées de défaillance (T4), l'ajustement d'une loi de Weibull (réalisé au moyen de l'outil SIMCAB) donne un β de 1,526 supérieur à 1 caractéristique d'un phénomène d'usure qui résulte de la condition prise sur les taux de transition ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$).

			Indicateur d'usure	
T2	T3	T4	Etat2	Etat2
5558,72726	10090,8541	10327,4031	a	c
1228,79659	2876,98152	5566,26405	a	a
2315,28953	5333,48094	6249,14489	a	b
16158,673	16807,0441	18319,4682	a	c
2571,8645	12942,3665	13252,1466	b	c
24705,8923	27519,9617	29220,8468	a	c
23773,2802	25574,9222	26148,7682	a	c
27086,2848	28982,5987	29945,289	b	c
1089,06176	1721,87596	4893,86359	a	b
10007,5752	12903,5077	13180,0483	a	b
2222,5833	2326,11906	2485,42276	b	b
683,641156	5397,22748	7060,60567	a	c

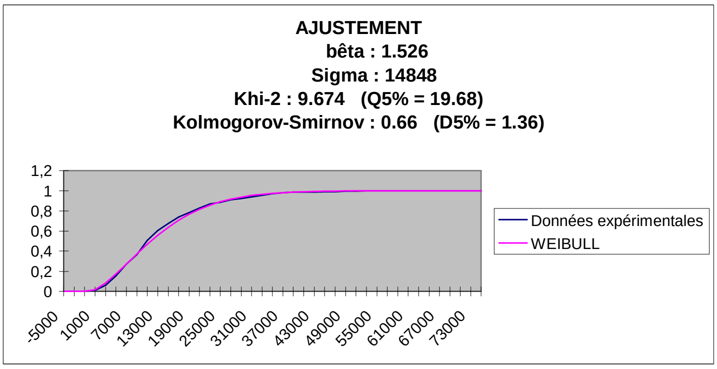


Fig. 3 : Ajustement d'une loi de Weibull réalisé à partir de 200 valeurs simulées

Fichier Excel disponible par un double clic sur l'icône : Feuille de calcul Microsoft Excel

2.4 - Ajustement du modèle de Markov caché

Pour une valeur de temps t, les probabilités P1, P2 et P3 de se trouver respectivement dans les états 1, 2 et 3 peuvent se calculer directement par utilisation d'un outil de traitement makovien (SUPERCAB).

En raison de la simplicité du modèle, elles peuvent également se calculer à partir d'expressions analytiques obtenues par résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre :

$P_1(t+dt) = P_1(t) - P_1(t)\,\lambda_1\,dt \qquad dP_1/dt = -P_1\,\lambda_1 \qquad \mathbf{P_1 = e^{-\lambda_1 t}}$

$P_2(t+dt) = P_2(t) + P_1(t)\,\lambda_1\,dt - P_2(t)\,\lambda_2\,dt \qquad dP_2/dt = P_1\,\lambda_1 - P_2\,\lambda_2$

$P_2 = ke^{-\lambda 1t} - k\,e^{-\lambda 2t} \;\; (P_2(0) = 0) \qquad -\lambda_1 ke^{-\lambda 1t} + k\lambda_2\,e^{-\lambda 2t} = \lambda_1\,e^{-\lambda 1t} - \lambda_2(ke^{-\lambda 1t} - ke^{-\lambda 2t})$

$-\lambda_1 k = \lambda_1 - \lambda_2 k \qquad k = \lambda_1/(\lambda_2 - \lambda_1) \qquad \mathbf{P_2 = \lambda_1/(\lambda_2-\lambda_1)\;\; e^{-\lambda 1t} - \lambda_1/(\lambda_2-\lambda_1)\;\; e^{-\lambda 2t}}$

$P_3(t+dt) = P_3(t) + P_2(t)\,\lambda_2\,dt - P_3(t)\,\lambda_3\,dt \qquad dP_3/dt = P_2\,\lambda_2 - P_3\,\lambda_3$

$P3 = l_1 e^{-\lambda 1t} + l_2 e^{-\lambda 2t} - (l_1+l_2)e^{-\lambda 3t} \;\; (P_3(0) = 0)$

$-\lambda_1 l_1\,e^{-\lambda 1t} - \lambda_2 l_2\,e^{-\lambda 2t} + (l_1+l_2)\lambda_3\,e^{-\lambda 3t} = \lambda_2\,(k\,e^{-\lambda 1t} - k\,e^{-\lambda 2t}) - \lambda_3(l_1\,e^{-\lambda 1t} + l_2\,e^{-\lambda 2t} - (l_1+l_2)e^{-\lambda 3t})$

$-\lambda_1 l_1 = \lambda_2 k - \lambda_3 l_1 \quad l_1 = \lambda_2 k/(\lambda_3 - \lambda_1) \qquad -\lambda_2 l_2 = -k\lambda_2 - \lambda_3 l_2 \quad l_2 = k\lambda_2/(\lambda_2 - \lambda_3)$

$\mathbf{P_3 = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\;\; e^{-\lambda 1t} + \lambda_1\lambda_2/\,(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\;\; e^{-\lambda 2t} + (\lambda_2\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2^2)/(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)\;\; e^{-\lambda 3t}}$

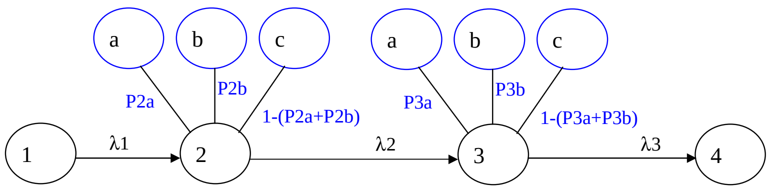
En considérant i et j l'indication d'usure dans les états respectifs 2 et 3, la vraisemblance d'une configuration simulée de résultats (T2, T3, T4, i, j) peut se calculer de la manière suivante :

$$V = P_1(T2)^*\lambda_1{}^*\,P_{2i} \quad * \quad P_2(T)^*\lambda_2{}^*\,P_{3j} \quad * \quad P_3(T4)^*\lambda_3$$

$$\text{Avec } T = T3 \text{ si } i \neq j$$

$$\text{et } T = T2 + (T4-T2) * (1/\lambda_2)/(1/\lambda_2+1/\lambda_3) \;\; \text{si } i = j \qquad \text{T3 étant alors non observable}$$

A partir de 200 configurations simulées de résultats, l'ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance permet de retrouver des paramètres du modèle relativement proches de ceux utilisés pour la simulation (outil GENCAB).



$\lambda 1 \leq \lambda 2 \leq \lambda 3$

P1 = $e^{-\lambda 1t}$
P2 = $\lambda 1/(\lambda 2-\lambda 1)\; e^{-\lambda 1t} - \lambda 1/(\lambda 2-\lambda 1)\; e^{-\lambda 2t}$
P3 = $\lambda 1\lambda 2/(\lambda 2-\lambda 1)(\lambda 3-\lambda 1)\; e^{-\lambda 1t} + \lambda 2/(\lambda 3-\lambda 2)\; e^{-\lambda 2t} + (2\lambda 1\lambda 2^2-\lambda 3\lambda 2^2-\lambda 2\lambda 1^2)/(\lambda 2-\lambda 1)(\lambda 3-\lambda 1)(\lambda 3-\lambda 2)\;\; e^{-\lambda 3t}$

	Ajustement	Initial
L_1:	**1,03E-04**	**1,00E-04**
L_2:	**2,98E-04**	**3,00E-04**
L_3:	**1,15E-03**	**1,00E-03**
P2a :	**0,805**	**0,8**
P2b :	**0,145**	**0,15**
P3a :	**0,085**	**0,1**
P3b :	**0,295**	**0,3**

MAT :	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-	0,000102984		
2		-	0,000298269	
3			-	0
4				-

INIT :	1	0	0	0
1000	0,90214143	0,084397283	0,009378287	0
	0,90214143	0,084397283	0,009378287	

-6495,54307

T2	T3	T4	Indicateur 1	2	Vraisemblance T1-> T2	T2-> T3	T3-> T4	T2-> T3 bis	Vraisemblance	LN vraisemblance
15149,98	15318,23	15536,24	a	a	2,16362E-05	3,08475E-05	3,28092E-05	3,04531E-05	1,47919E-15	-34,1472818
12237	12372,97	12804,92	a	b	2,92056E-05	4,00608E-05	4,15423E-05	3,9008E-05	1,15423E-14	-32,0927551
4979,887	5179,693	5380,678	a	a	6,16655E-05	5,87124E-05	5,66927E-05	5,87585E-05	1,40558E-14	-31,8957413
1592,243	3239,321	6101,768	a	c	8,7409E-05	5,28207E-05	5,77939E-05	5,87101E-05	1,33177E-13	-29,6470962

Fig. 4 : Ajustement du modèle de Markov caché

Feuille de calcul
Microsoft Excel

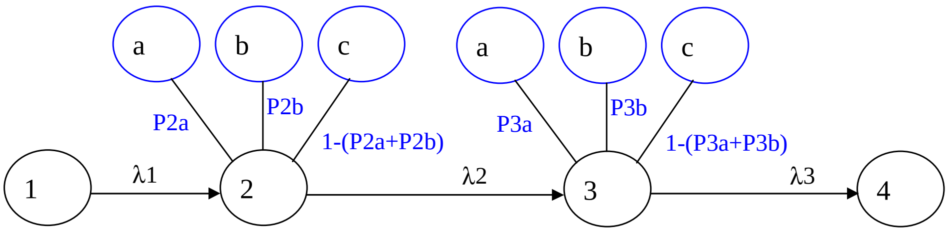
2.5 - Politique de maintenance

En fonction du coût de remplacement ou de réparation du matériel et de celui occasionné par une panne éventuelle, une politique optimale peut être établie ; les paramètres de celle-ci étant évalués en couplant des outils d'optimisation (GENCAB) et de simulation (SIMCAB).

Toutefois, le gain apporté par l'observabilité peut être significatif même avec une politique relativement rustique comme le montre l'exemple ci-après :

Sans observabilité : remplacement à $T = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + 1/\lambda_3)/5$ (durée moyenne avant panne/5)

Avec observabilité : remplacement à $T = T2 + P_{2i} * (1/\lambda_2 + 1/\lambda_3)/5 + P_{3i} * (1/\lambda_3)/5$



$\lambda 1 \leq \lambda 2 \leq \lambda 3$

L_1:	1,00E-04
L_2:	3,00E-04
L_3:	1,00E-03
P2a :	0,8
P2b :	0,15
P3a :	0,1
P3b :	0,3

	T2	T3	T4
Simulation :	30613,1742	38672,1094	39291,1442

Observables	
Etat2	Etat2
a	c

			Moyenne			Moyenne
Politique 1	Remplacement 1 :		2867	Fiabilité :	1	0,9508
Politique 2	Remplacement 2 :	31327	10538	Fiabilité :	1	0,9521

Fig. 5 : Simulation de 2 politiques de maintenance (10000 simulations)

Feuille de calcul
Microsoft Excel

Dans cet exemple, la maintenance prédictive se révèle ainsi plus fiable malgré une durée moyenne d'utilisation du matériel beaucoup plus longue.