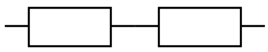
TP SdF N° 2

Comparer des résultats de calcul et de Simulation de Monte-Carlo

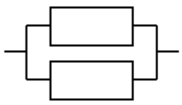
1 - Comparer la fiabilité à 1000 heures évaluée par simulation et par calcul* des ensembles suivants constitués d'éléments identiques ($\lambda = 10^{-3}$ hr^{-1}).

- Elément simple

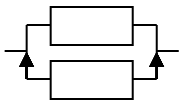
- Eléments en série * 2



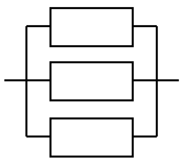
- Redondance active 1 parmi 2



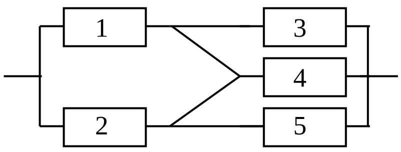
- Redondance passive froide 1 parmi 2 ($\lambda_{OFF} = \lambda_{ON}/10$)



- Redondance active 2/3 (Vote)



- Redondance active particulière



2 - Effectuer cette même comparaison dans le cas où l'élément identique subit un phénomène d'usure selon un loi de Weibull de paramètres $\sigma = 1/\lambda = 1000$ et $\beta = 2$

-

* L'outil SUPERCAB permet d'obtenir immédiatement tous ces résultats mais il est demandé dans ce TP de retrouver toutes les formules littérales de fiabilité des redondances.

a) MTTF (Mean Time To Failure)

On définit 4 variables aléatoires TTF1, TTF2, TTF3, TTF_{OFF} , TTF4 et TTF5 correspondant à la durée de bon fonctionnement d'un élément. L'outil calcule ces variables en inversant la fonction de répartition : TTF = $-\mathrm{Log}(\tau)/\lambda$ avec τ tiré aléatoirement entre 0 et 1 (loi exponentielle: $R = e^{-\lambda t}$).

Les durées de bon fonctionnement TTF des différents ensembles peuvent alors être définies de la manière suivante :

- Elément simple : TTF1

- Eléments en série * 2 : MIN(TTF1;TTF2)

- Redondance active 1/2 : MAX(TTF1;TTF2)

- Redondance passive 1/2 ($\lambda_{OFF} = \lambda_{ON}/10$) : TTF1+ SI(TTFoff >TTF1;TTF2;0)

- Redondance active 2/3 (Vote) : MAX(MIN(TTF1;TTF2);MIN(TTF1;TTF3);MIN(TTF2;TTF3))

- Redondance particulière : MAX(MIN(TTF1;MAX(TTF3;TTF4));MIN(TTF2;MAX(TTF4;TTF5)))

Pour un certain taux de confiance ($1-\alpha$), l'outil permet de calculer l'intervalle de confiance (intervalle dans laquelle la valeur vraie se trouve avec le risque α de se tromper) qui est défini par le théorème Central Limite ($I = M \pm U_{\alpha/2}\, \sigma\, N^{-1/2}$).

b) Fiabilité

Pour chacun des différents sous ensembles, la mission est réussie si la durée de bon fonctionnement dépasse celle de la mission :

$$\mathrm{SI}(TTF>T_{mission}\ ;1\ ;0)$$

La fiabilité se calcule alors simplement en faisant le rapport du nombre de missions réussies sur le nombre de missions total. Cette fiabilité peut alors être comparée à celle obtenue par calcul à partir des formules suivantes :

- Elément simple : $R = e^{-\lambda T_{mission}}$

- Eléments en série * 2 : R^2

- Redondance active 1/2 : $1 - (1- R)^2 = 2R - R^2$

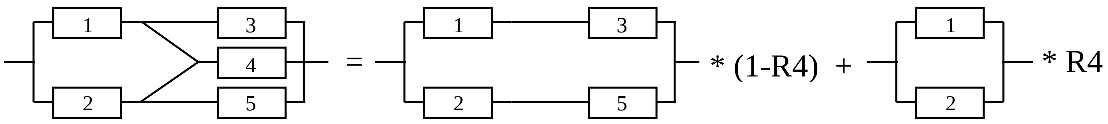
- Redondance passive 1/2 ($\lambda_{OFF} = \lambda_{ON}/10$) : $R(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda u} du \times e^{-\lambda OFF u} \times e^{-\lambda (t-u)}$

(probabilité de panne à l'instant u × fiabilité de l'élément redondant à l'état OFF à u × fiabilité de cet élément à l'état ON entre u et t)

$$R(T_{mission}) = e^{-\lambda ON\, Tmission}\,[1 + \lambda_{ON}/\lambda_{OFF}\,(1- e^{-\lambda OFF\, Tmission})]$$

- Redondance active 2/3 (Vote) : $R^3 + 3 R^2 * (1-R)$

- Redondance particulière (théorème des probabilités totales) :



Fiabilité $= [1-(1-R1*R3)*(1-R2*R5)]*(1-R4) + [1-(1-R1)*(1-R2)]* R4$
$= R^5-R^4-3R^3+4R^2$

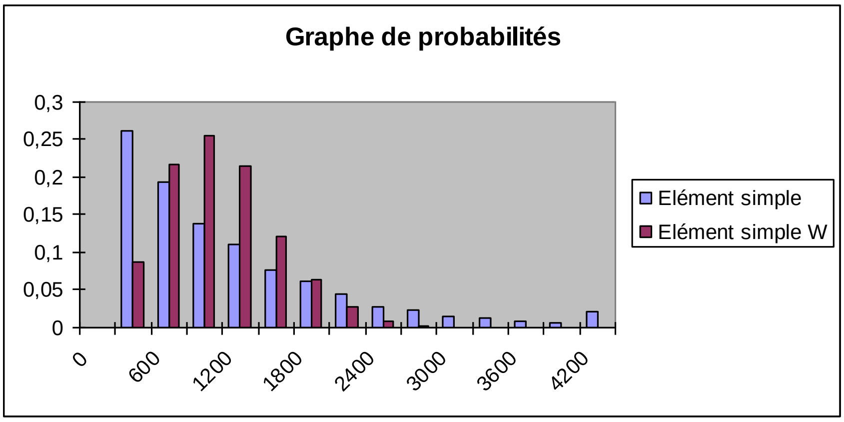
L'ensemble des résultats obtenus après 10000 simulations est fourni ci-dessous.

	TTF Simulé	MTTF simulé Moyenne	Ecart-type	Intervalle de confiance Taux 90% Min	Max	MTTF
Elément simple	1104	1001	970	985	1017	1000
Eléments en série * 2	333	507	499	499	515	
Redondance active 1/2	1104	1500	1089	1482	1518	
Redondance passive 1/2	1437	1921	1330	1899	1943	
Redondance active 2/3 (vote)	352	845	600	835	855	
Redondance particulière	1531	957	638	946	967	

	Réussite mission	Fiabilité simulée Moyenne	Ecart-type	Intervalle de confiance Taux 90% Min	Max	Fiabilité calculée
Elément simple	1	0,372	0,483	0,364	0,380	0,368
Eléments en série * 2	0	0,137	0,344	0,132	0,143	0,135
Redondance active 1/2	1	0,612	0,487	0,604	0,620	0,600
Redondance passive 1/2	1	0,727	0,446	0,719	0,734	0,718
Redondance active 2/3 (vote)	0	0,315	0,464	0,307	0,322	0,306
Redondance particulière	1	0,379	0,485	0,371	0,387	0,380

c) Loi de Weibull

Pour une loi de Weibull ($R = e\text{-}(t/\sigma)^\beta = e\text{-}(\lambda t)^\beta$), les traitements sont identiques mais les variables aléatoires sont calculées par l'outil de la manière suivante : TTF = $[-\mathrm{Log}(\tau)]^{1/\beta} /\lambda$ avec τ tiré aléatoirement entre 0 et 1. Le graphe ci-après montre la distribution obtenue par simulation avec la loi exponentielle et la loi de Weibull.



Le MTBF d'un élément simple est égal à $1/\lambda * \Gamma\,[(1+\beta)/\beta]$ dans lequel la fonction Gamma est définie par : $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx$

La fiabilité de la redondance passive ne peut plus se calculer simplement par intégration.

L'ensemble des résultats obtenus après 10000 simulations est fourni ci-dessous.

		MTTF simulé				
				Intervalle de confiance		
				Taux	90%	MTTF
	TTF Simulé	Moyenne	Ecart-type	Min	Max	
Elément simple	1452	891	466	884	899	886
Eléments en série * 2	1452	630	324	624	635	
Redondance active 1/2	1587	1147	435	1140	1154	
Redondance passive 1/2	3039	1768	654	1757	1779	
Redondance active 2/3 (vote)	1452	855	313	850	860	
Redondance particulière	978	919	309	914	924	

		Fiabilité simulée				Fiabilité calculée
				Intervalle de confiance		
				Taux	90%	
	Réussite mission	Moyenne	Ecart-type	Min	Max	
Elément simple	1	0,372	0,483	0,364	0,379	0,368
Eléments en série * 2	1	0,134	0,341	0,128	0,140	0,135
Redondance active 1/2	1	0,602	0,490	0,594	0,610	0,600
Redondance passive 1/2	1	0,885	0,319	0,880	0,890	
Redondance active 2/3 (vote)	1	0,302	0,459	0,294	0,309	0,306
Redondance particulière	1	0,378	0,485	0,370	0,386	0,381

Remarque : Dans cet exemple, bien que le MTTF de l'élément simple suivant une loi de Weibull (886 heures) est plus faible que celui suivant une loi exponentielle (1000 heures), le temps moyen de bon fonctionnement de deux éléments en série est supérieure (635 au lieu de 500). Ce paradoxe s'explique simplement par l'apparition plus tardive mais en plus grand nombre des défaillances (voir le graphe des probabilités).