

TP SdF N° 30

Modélisation markovienne d'un système mécatronique avec regroupement d'états équivalents

Ce TP porte sur l'évaluation de diverses architectures par modélisation markovienne. Il montre la nécessité de regrouper des états équivalents sur des systèmes d'une certaine complexité ainsi que l'intérêt d'un outil de modélisation automatique.

Un système mécatronique embarqué sur un satellite est constitué de 4 mécanismes identiques, chacun associé à un capteur de position (éventuellement redondé) et une électronique de commande.

1 - Proposer une architecture répondant à un objectif de fiabilité de 0,87 à 10 ans, connaissant le taux de défaillance prévisionnel de chacun des constituants (électronique : $1000 \cdot 10^{-9} \text{ h}^{-1}$ soit 1000 fits, capteur : 250 fits et mécanismes : 200 fits), en faisant l'hypothèse $\lambda_{\text{ON}} = 10 * \lambda_{\text{OFF}}$.

Les architectures suivantes seront évaluées :

- a - Absence de redondance
- b – Redondance des électroniques de commande de chacun des mécanismes
- c – Redondance globale des électroniques et des capteurs de chacun des mécanismes
- d – Deux blocs en redondance froide 2 parmi 3 des électroniques et capteurs redondés
- e – Redondance froide 4 parmi 5 des électroniques et redondance des capteurs dans chacun des mécanismes (1 sur 8 nominalement OFF)
- f – Redondance froide 4 parmi 5 des électroniques et redondance des capteurs dans chacun des mécanismes (4 sur 8 nominalement OFF)

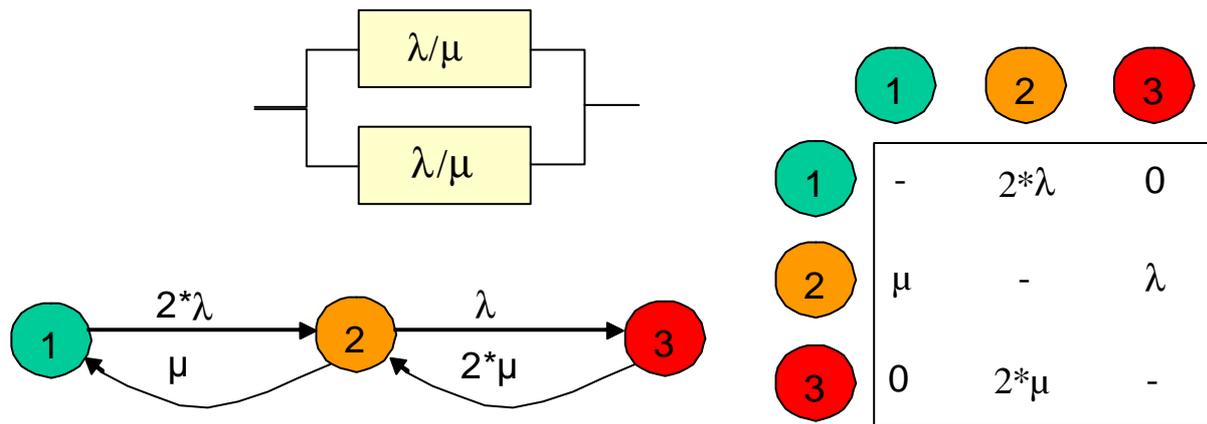
2 – Evaluer l'architecture (d) dans un mode de fonctionnement dégradé à 3 mécanismes opérationnels parmi 4.

3 – Sachant que les mécanismes incorporent des moteurs, proposer un schéma de commutation à relais entre les électroniques de commande et les enroulements de moteur.

Rappel sur la modélisation markovienne

Une chaîne de Markov décrit un processus aléatoire entre des états discrets pour lequel tout changement d'état ne dépend que de l'état courant (sans mémoire des changements d'états passés) et est régi par un taux de transition constant (loi exponentielle dans les processus homogènes) ou fonction du temps passé dans l'état courant.

Un système markovien peut être modélisé par un graphe de Markov (dans lequel les états sont représentés par des cercles et les transitions par des flèches) ou directement par une matrice de Markov (dont les coefficients correspondent aux taux de transition λ_{ij} des états de départ i vers les états d'arrivée j) comme l'illustre l'exemple, ci-dessous, d'une redondance active 1 parmi 2 d'équipements de taux de défaillance λ et de taux de réparation μ avec 2 réparateurs (les transitions $\lambda_{ii} = -\sum \lambda_{ij \neq i}$ ne sont pas renseignées).



- 1 : absence de panne
- 2 : perte de l'un des éléments (regroupement de 2 états équivalents)
- 3 : perte du système

Le calcul de la probabilité de se trouver dans les différents états s'effectue par résolution d'un système d'équations différentielles du premier ordre à partir de l'équation de Chapman-Kolmogorov :

$$dP/dt = PM \text{ avec } P \text{ le vecteur probabilité et } M \text{ la matrice de Markov}$$

Le calcul est rapide et précis (notamment par rapport à la simulation de Monte-Carlo) mais cette technique de modélisation présente les limitations suivantes :

- Emploi exclusif de taux de transition constants (lois exponentielles)
- Explosion combinatoire des états (2^n pour un système de n éléments à 2 états)
- Complexité de la modélisation (matrice ou graphe)

Différents palliatifs existent cependant dont la méthode des états fictifs pour la première limitation et le regroupement des états équivalents, qui peut se limiter aux seuls éléments interdépendants, pour la seconde.

Toutefois, dans le cas de systèmes réparables, les états ne peuvent être regroupés que si les durées de réparation des éléments correspondants sont similaires.

Le logiciel SUPERCAB met en œuvre une technique de modélisation automatique avec regroupement des états équivalents¹. Toutes les évaluations ci-après sont directement réalisées au moyen de l'outil d'évaluation d'architecture de ce logiciel dont les calculs et BDF (Bloc Diagramme de Fiabilité) générés sont explicités.

¹ A. Cabarbaye, L. Ngom - Mise en œuvre de la méthode des états fictifs et génération automatique des matrices de Markov - Congrès Qualita 99, Paris 25-26 mars 1999.

1 – Evaluation des différentes architectures



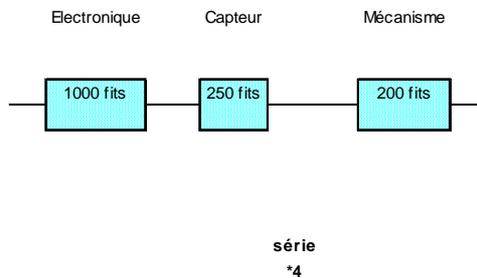
Feuille de calcul
Microsoft Excel

Le fichier Excel correspondant est accessible en cliquant sur l'icône ci après :

a - Absence de redondance

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF(fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10	
Electronique	1000						
Capteur	250						
Mécanisme	200						
	1450	4	série			0,60164964	
\$	a - Non redondé						0,60164964

Les 3 constituants sont considérés en série dans chacun des 4 blocs en série. La fiabilité est égale à $(e^{-\sum \lambda_i T})^4$.

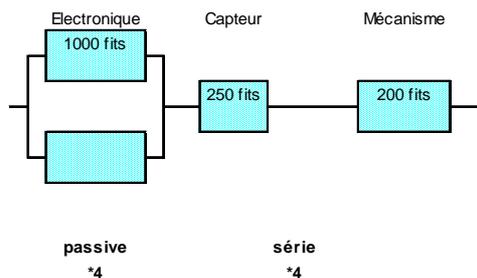


b – Redondance des électroniques de commande de chacun des mécanismes

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF(fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10	
Electronique	1000	4	passive			0,98421241	
Capteur	250						
Mécanisme	200						
	450	4	série			0,85412306	
\$	b - Electronique redondé						0,84063852

L'électronique est en redondance passive. Sa fiabilité est directement calculée à partir de la formule de redondance M parmi N suivante :

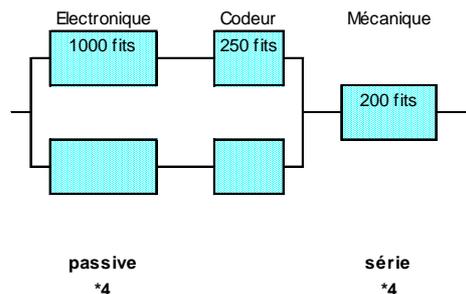
$$R = e^{-M\lambda t} \left[1 + \sum_{i=1}^{N-M} \frac{(1 - e^{-\lambda^* t})^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} \left(j + M \frac{\lambda}{\lambda^*} \right) \right] \text{ avec } \lambda^* = \lambda_{\text{OFF}} = \lambda_{\text{ON}}/10$$



c – Redondance globale des électroniques et des capteurs de chacun des mécanismes

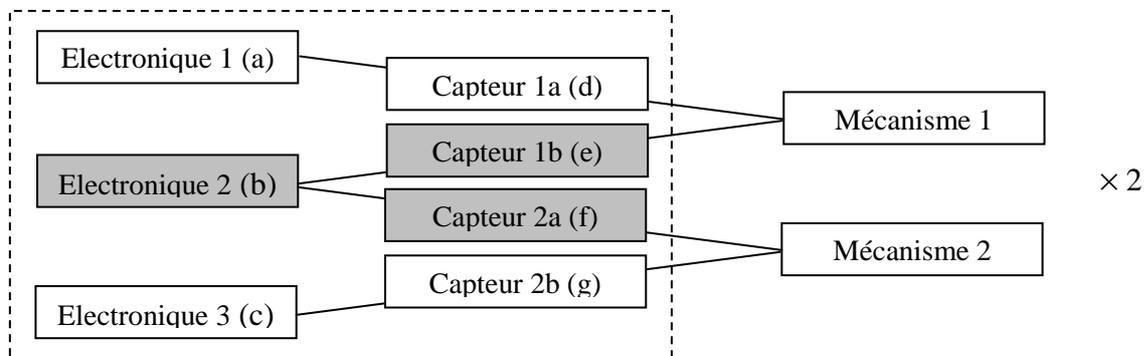
ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF (fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10
Electronique	1000					
Capteur	250					
	1250	4	passive	125		0,97578184
Mécanisme	200	4	série			0,93231923
§ c - Electronique et capteur redondé						0,90974018

La fiabilité est calculée de la même manière que précédemment



d – Deux blocs en redondance froide 2 parmi 3 des électroniques et capteurs redondés

L'architecture considérée est la suivante dans laquelle l'électronique 2 et les capteurs 1b et 2a sont nominalement à l'état OFF.



La fiabilité des électroniques et des capteurs ne peut plus être évaluée à partir de formules analytiques mais à partir d'un modèle markovien.

Ce modèle a 128 états possibles, soit 2^7 correspondant aux états de panne et de fonctionnement de chacun des 7 constituants du sous-ensemble, dont certains peuvent être regroupés.

Un tel modèle est généré automatiquement par l'outil à partir des diverses conditions de fonctionnement et conditions d'états OFF, saisies préalablement dans la table.

Conditions de fonctionnement : $a*d*c*g+a*d*b*f+b*e*c*g$

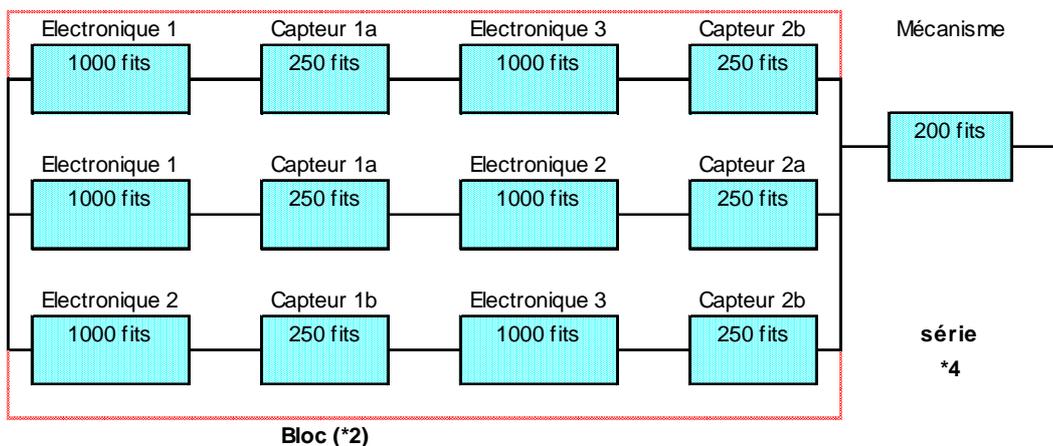
Conditions d'états OFF : b off si $a*d*c*g$ e off si $a*d*c*g$ f off si $a*d*c*g$

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF(fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10	
Electronique 1 (a)	1000			b off : a*d*c*g e off : a*d*c*g f off : a*d*c*g		0,9570503	
Electronique 2 (b)	1000						
Electronique 3 (c)	1000						
Capteur 1a (d)	250						
Capteur 1b (e)	250						
Capteur 2a (f)	250						
Capteur 2b (g)	250						
Mécanisme	200	4	série			0,93231923	
\$	d - Redondance froide 2/3 des électroniques						0,8922764

ETATS :	MAT :	1	2	3	4	5	6	7
g f e d c b a	1	-	λe^*	λf^*	$\lambda a + \lambda d$	λb^*	$\lambda c + \lambda g$	
g f ne d c b a	2		-			$\lambda b^* + \lambda f^*$	$\lambda c + \lambda g$	$\lambda a + \lambda d$
g nf e d c b a	3			-	$\lambda a + \lambda d$	$\lambda b^* + \lambda e^*$		$\lambda c + \lambda g$
g nf e nd c b na	4				-			$\lambda b + \lambda c + \lambda e + \lambda g$
g nf ne d c nb a	5					-		$\lambda a + \lambda c + \lambda d + \lambda g$
ng f ne d nc b a	6						-	$\lambda a + \lambda b + \lambda d + \lambda f$
ng nf ne nd nc nb na	7							-
	INIT :	1	0	0	0	0	0	0
	ETATS :	1	1	1	1	1	1	0

$$\lambda_{i^*} = \lambda_{i_{off}}$$

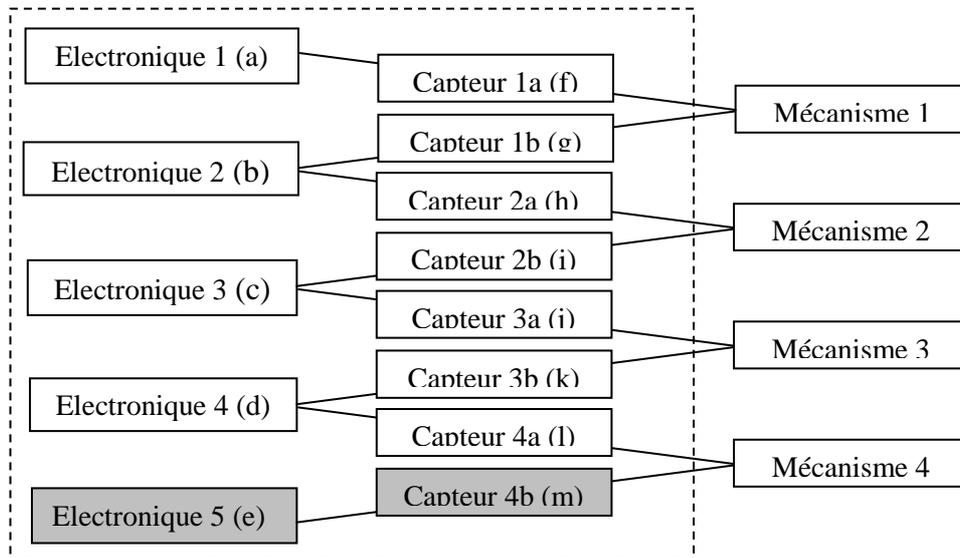
Le modèle comprend 7 états regroupés au lieu des 128 initiaux. Outre l'absence de panne et la perte complète du système, ceux-ci concernent la perte d'un capteur redondant (e ou f), la perte d'une chaîne et éventuellement du capteur redondant non utilisé (a, d, f ou c, g, e) et celle de l'électronique redondante et éventuellement des capteurs associés (b, e, f).



Bloc (*2)
 Electronique 2 off si Electronique 1 et Capteur 1a et Electronique 3 et Capteur 2b ok
 Capteur 1b off si Electronique 1 et Capteur 1a et Electronique 3 et Capteur 2b ok
 Capteur 2a off si Electronique 1 et Capteur 1a et Electronique 3 et Capteur 2b ok

e – Redondance froide 4 parmi 5 des électroniques et redondance des capteurs dans chacun des mécanismes (1 sur 8 nominale OFF)

L'architecture considérée est la suivante dans laquelle l'électronique 5 et le capteur 4b sont nominale à l'état OFF.



L'ensemble des électroniques et capteurs peut faire l'objet d'un modèle markovien de 8192 états soit 2^{13} correspondant aux états de panne et de fonctionnement de chacun de ses 13 constituants.

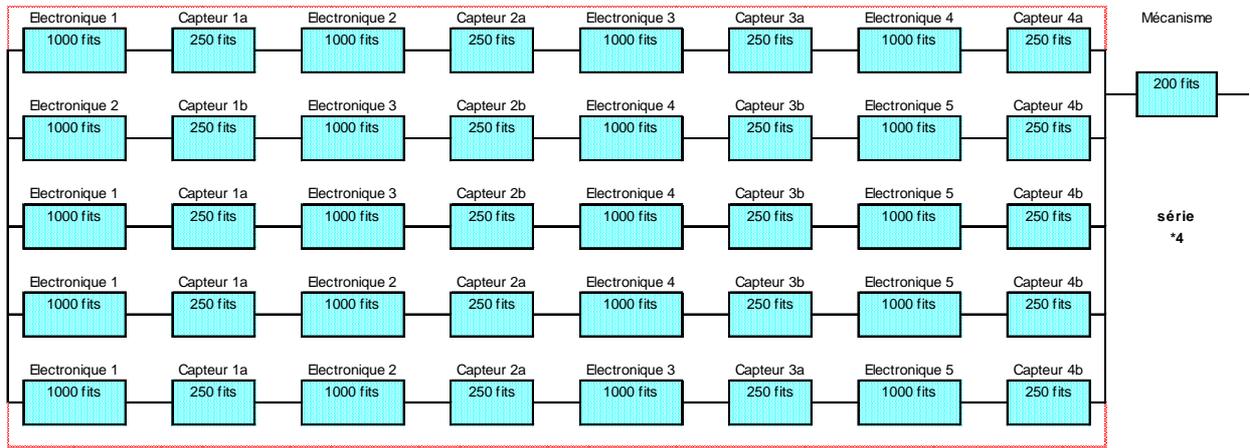
Un modèle avec regroupement d'états équivalents peut être généré par l'outil à partir des conditions de fonctionnement et d'états OFF :

$$\text{Conditions de fonctionnement : } a*f*b*h*c*j*d*1 + b*g*c*i*d*k*e*m + a*f*c*j*d*k*e*m + a*f*b*h*d*k*e*m + a*f*b*h*c*j*e*m$$

$$\text{Conditions d'états OFF : } e \text{ off : } a*f*b*h*c*j*d*1 \quad m \text{ off : } a*f*b*h*c*j*d*1$$

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF (fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10	
Electronique 1 (a)	1000						
Electronique 2 (b)	1000						
Electronique 3 (c)	1000						
Electronique 4 (d)	1000						
Electronique 5 (e)	1000						
Capteur 1a (f)	250						
Capteur 1b (g)	250						
Capteur 2a (h)	250						
Capteur 2b (i)	250						
Capteur 3a (j)	250						
Capteur 3b (k)	250						
Capteur 4a (l)	250						
Capteur 4b (m)	250						
			$a*f*b*h*c*j*d*1$ $+b*g*c*i*d*k*e*m$ $+a*f*c*j*d*k*e*m$ $+a*f*b*h*d*k*e*m$ $+a*f*b*h*c*j*e*m$	$e \text{ off : } a*f*b*h*c*j*d*1$ $m \text{ off : } a*f*b*h*c*j*d*1$		0,92629085	
Mécanisme	200	4	série			0,93231923	
\$	e - 5 électroniques + 8 capteurs (dont 1 froid)						0,86359877

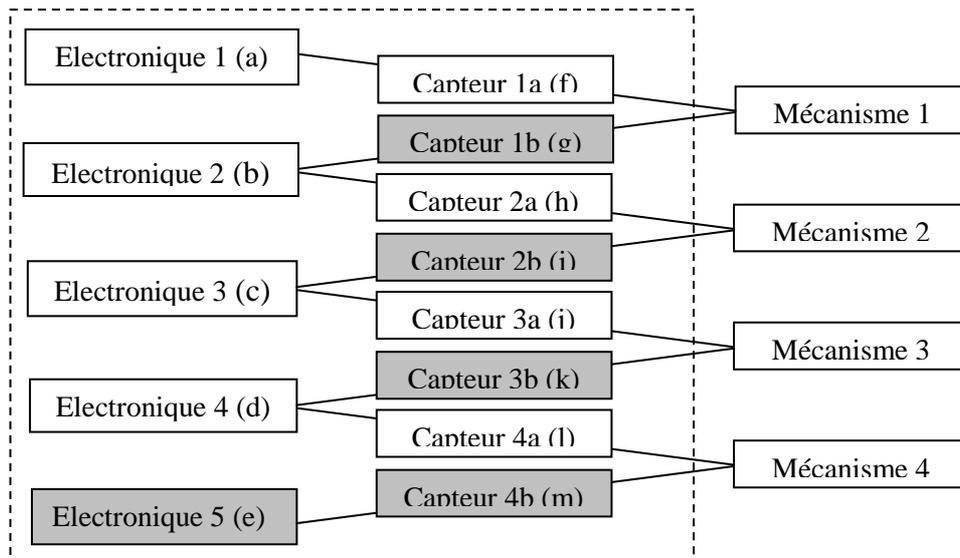
Présenté à la page suivante, le modèle correspondant comprend 16 états regroupés au lieu des 8192 initiaux.



Electronique 5 off si Electronique 1 et Capteur 1a et Electronique 2 et Capteur 2a et Electronique 3 et Capteur 3a et Electronique 4
 Capteur 4b off si Electronique 1 et Capteur 1a et Electronique 2 et Capteur 2a et Electronique 3 et Capteur 3a et Electronique 4

f – Redondance froide 4 parmi 5 des électroniques et redondance des capteurs dans chacun des mécanismes (4 sur 8 nominale OFF)

Cette architecture diffère de la précédente par la mise OFF de tous les capteurs redondants.



Les conditions d'états OFF deviennent alors :

$$g \text{ off} : a*f \quad i \text{ off} : a*f*b*h \quad k \text{ off} : a*f*b*h*c*j \quad m \text{ off} : a*f*b*h*c*j*d*l$$

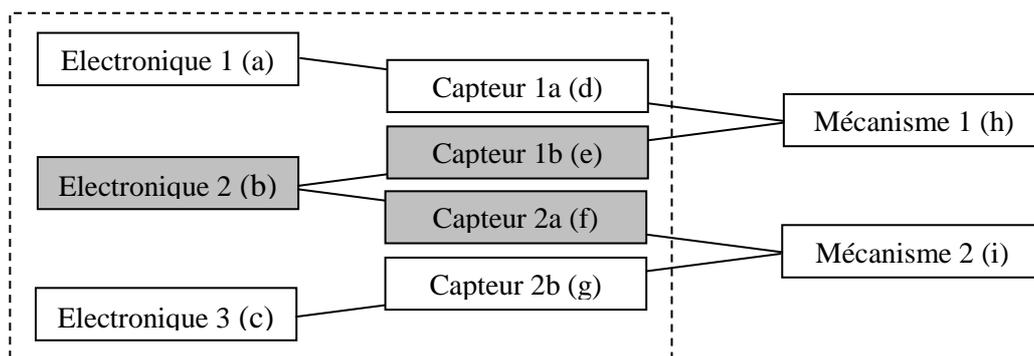
$$e \text{ off} : a*f*b*h*c*j*d*l''$$

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF(fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10	
Electronique 1 (a)	1000						
Electronique 2 (b)	1000						
Electronique 3 (c)	1000						
Electronique 4 (d)	1000						
Electronique 5 (e)	1000						
Capteur 1a (f)	250						
Capteur 1b (g)	250						
Capteur 2a (h)	250						
Capteur 2b (i)	250						
Capteur 3a (j)	250						
Capteur 3b (k)	250						
Capteur 4a (l)	250						
Capteur 4b (m)	250						
			$a*f*b*h*c*j*d+l+b*g*c*i*d*k*e*m+a*f*c*i*d*k*e*m+a*f*b*h*d*k*e*m+a*f*b*h*c*j*e*m$	g off : a*f i off : a*f*b*h k off : a*f*b*h*c*j m off : a*f*b*h*c*j*d*l e off : a*f*b*h*c*j*d*l		0,93047834	
Mécanisme	200	4	série			0,93231923	
\$	f - 5 électroniques + 8 Capteurs (dont 4 froids)						0,86750285

Les architectures c à 8 électroniques (0,91) et d (0,89) à 6 électroniques répondent à l'objectif de fiabilité de 0,87 à 10 ans et les architectures e (0,863) et f (0,867) à 5 électroniques présentent une conformité marginale, sans que la mise OFF des capteurs redondants soit d'un grand effet.

La simplicité et le coût semble favoriser l'architecture e mais d'autres considérations, telle que la dissipation des équipements, doivent être également pris en compte.

2 – Architecture d en mode de fonctionnement dégradé à 3 mécanismes opérationnels parmi 4



Les conditions de fonctionnement d'un bloc de 2 mécanismes sont les suivantes :

Fonctionnement des 2 mécanismes : $(a*d*c*g+a*d*b*f+b*e*c*g)*h*i$

Fonctionnement à 1 mécanisme parmi 2 : $a*d*h+b*e*h+b*f*i+c*gi$

Conditions d'états OFF : b off si $a*d*c*g$ e off si $a*d*c*g$ f off si $a*d*c*g$

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF(fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10
Electronique 1 (a)	1000		(a*d*c*g+a*d*b*f+b*e*c*g)*h*i	b off : a*d*c*g e off : a*d*c*g f off : a*d*c*g		0,94460383
Electronique 2 (b)	1000					
Electronique 3 (c)	1000					
Capteur 1a (d)	250					
Capteur 1b (e)	250					
Capteur 2a (f)	250					
Capteur 2b (g)	250					
Mécanisme 1 (h)	200					
Mécanisme 2 (i)	200					
\$ d - 2 mécanismes parmi 2						0,94460383

ELEMENTS	Taux de panne ON (fit)	Nb	Type de redondance	Taux de panne OFF(fit)	Taux d'utilisation r (%)	Fiabilité T (année) = 10
Electronique 1 (a)	1000		a*d*h+b*e*h+b*f*i+c*g*i	b off : a*d*c*g e off : a*d*c*g f off : a*d*c*g		0,99885854
Electronique 2 (b)	1000					
Electronique 3 (c)	1000					
Capteur 1a (d)	250					
Capteur 1b (e)	250					
Capteur 2a (f)	250					
Capteur 2b (g)	250					
Mécanisme 1 (h)	200					
Mécanisme 2 (i)	200					
\$ d - 1 mécanismes parmi 2						0,99885854

La probabilité de fonctionnement d'un bloc avec un seul mécanisme est égale à :

$$P_{1 \text{ mécanismes unique}} = P_{1 \text{ mécanismes parmi 2}} - P_{2 \text{ mécanismes parmi 2}} = 0,054255$$

La probabilité de fonctionnement dégradé de 2 blocs à 3 mécanismes parmi 4 est alors égale à :

$$P_{\text{dégradé}} = P_{2 \text{ mécanismes parmi 2}}^2 + 2 * P_{2 \text{ mécanismes parmi 2}} * P_{1 \text{ mécanismes unique}} = 0,99477$$

3 – Commutation entre les électroniques de commande et les enroulements de moteur

Les relais ont pour mode de défaillance principal le « blocage dans l'une des positions ». Ce mode de défaillance, ainsi que l'éventuelle « commutation intempestive », n'entraîne pas la perte du système sans une seconde panne de l'un des constituants de ce dernier (faible probabilité).

Les relais peuvent être également en panne en « circuit ouvert » même si l'on évite de les commuter sous tension. Aussi peut-on les redonder pour commuter les enroulements de moteur.

