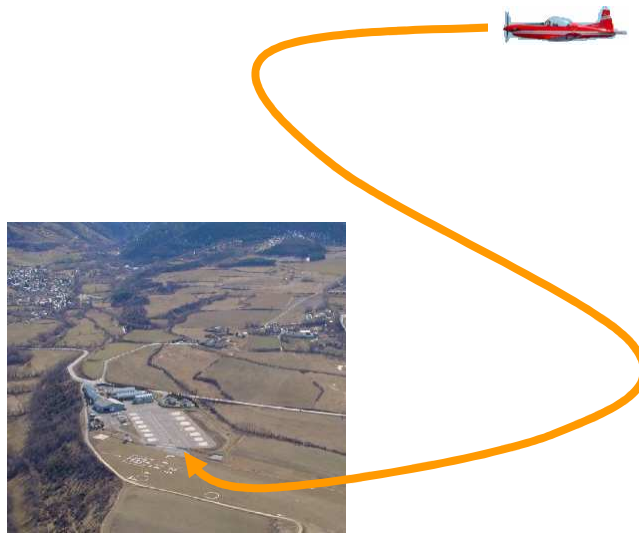


TP SdF N° 35

Optimisation d'une trajectoire d'atterrissage d'urgence

L'objet de ce TP est de choisir au mieux une trajectoire d'urgence d'un avion, en cas de perte de ses moteurs, afin d'atteindre une piste d'atterrissage en minimisant les risques.



1 – Présenter les courbes de Bézier

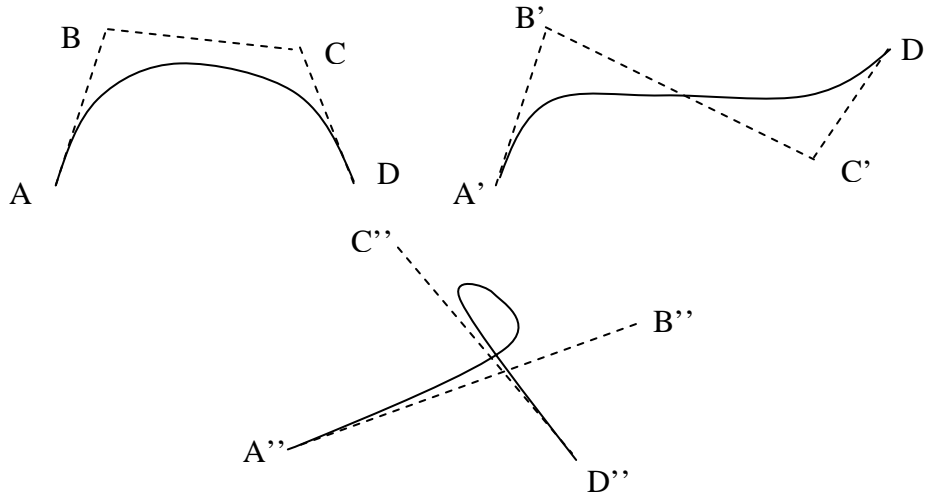
2 – Proposer une modélisation de trajectoire d'urgence par des courbes de Bézier ainsi que des contraintes et critères d'optimisation de cette trajectoire.

3 – Optimiser la trajectoire d'urgence

1 – Courbes de Bézier

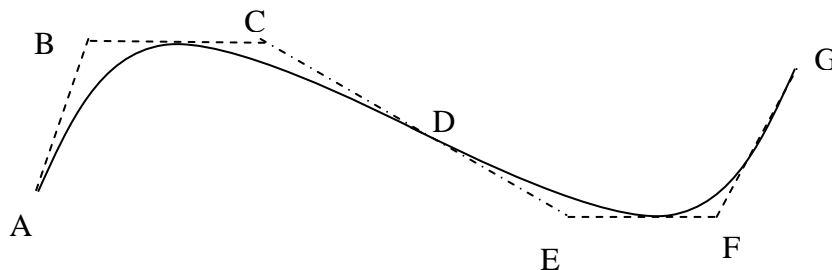
Décrites par l'ingénieur français Pierre Bézier en 1962, les courbes qui portent son nom sont des courbes polynomiales paramétriques. Quatre points choisis dans l'espace (A, B, C et D) caractérisent une courbe de Bézier de degré 3 définie par l'expression :

$$P(t) = A (1 - t)^3 + 3 B t(1 - t)^2 + 3 C t^2(1 - t) + D t^3(1 - t) \quad \text{avec } 0 \leq t \leq 1$$



Constituée d'une ou deux courbures, une courbe de Bézier de degré 3 commence en A ($t = 0$) et se termine en D ($t = 1$) et est tangente aux droites AB et CD.

Les courbes de Bézier de degré supérieur à 3 sont rarement utilisées car on préfère se ramener à l'utilisation de plusieurs courbes de degré 3 que l'on raccorde de manière à ce que le dernier point d'une courbe soit le premier d'une autre. On obtient ainsi une courbe continue comme illustrée ci-dessous :



Pour avoir une courbe de classe C_1 en D, il faut que les points CDE soient alignés, et si on veut qu'elle soit de classe C_2 en D, alors les points BDF sont également alignés (une courbe de classe C_p résulte d'une fonction p fois dérivable dont la dérivée p ème est continue).

2 – Modélisation d'une trajectoire d'urgence

2.1 Choix de courbes de Bézier

Partant d'un point, caractérisé par une altitude, un cap et une pente de l'avion au moment de l'arrêt de ses moteurs, et aboutissant à l'entrée d'une piste d'atterrissage également caractérisée par une altitude, un cap et une pente de descente, la trajectoire d'urgence peut être modélisée par 2 courbes de Bézier de degré 3, raccordées entre elles en respectant la condition de classe C_2 (sans discontinuité de l'accélération conformément aux lois de la mécanique).

Cette courbe peut offrir quatre courbures successives qui rendent la trajectoire relativement robuste au besoin d'évitement éventuel. La trajectoire est alors entièrement définie par 7 paramètres (5 points intermédiaires liés par 4 conditions de direction).

2.2 Contraintes et critères d'optimisation

Liées aux caractéristiques aérodynamiques de l'avion, les conditions de décrochage imposent le respect d'une pente minimale et d'un rayon de virage minimal fonction de la pente adoptée. De même, la pente maximale est limitée par des contraintes de vitesse et de tenue structurale.

Le relief constitue une contrainte absolue de la trajectoire. Les conditions météorologiques rencontrées sur la trajectoire peuvent également conduire à des contraintes d'évitement (cumulonimbus) ou être intégrées dans un critère global de minimisation du risque encouru.

Ce même critère peut également recouvrir les caractéristiques des différents sites d'atterrissage envisagés, la proximité au relief, qui augmente le risque de collision avec le sol, et la durée du vol au cours duquel certains facteurs de risques peuvent se développer (feu à bord consécutif à l'arrêt moteur, dommage structurel, stress des passagers et du personnel navigant, etc.).

3 – Optimisation de la trajectoire d'urgence

Afin de ne pas lasser le lecteur par des considérations trop spécialisées en aéronautique, la problématique est ici volontairement simplifiée et la trajectoire n'est contrainte que par le relief (généralisé par simulation et tabulé comme indiqué en figure 1) et des valeurs fixes relatives aux pentes minimale et maximale et au rayon minimal de virage. Le critère choisi ici est la simple minimisation de la longueur de la trajectoire.

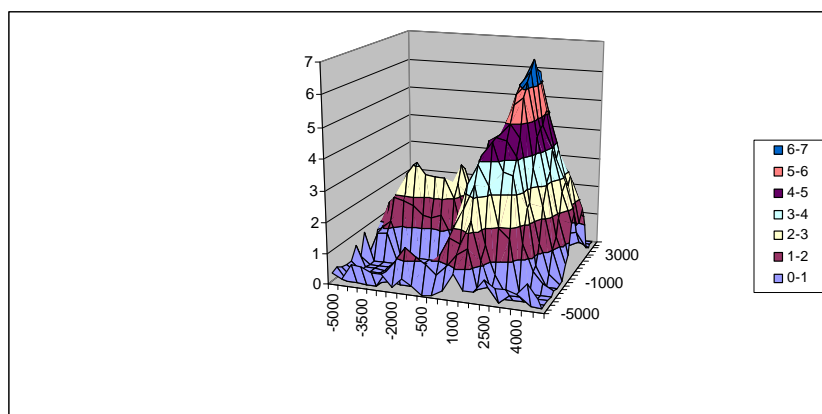


Figure 1. Relief simulé

A partir de la feuille de calcul de la figure 2, l'optimisation est réalisée au moyen de l'outil GEN CAB qui calcule la configuration optimale des 7 paramètres (jaune clair) qui minimise la longueur de la trajectoire (orange clair) tout en satisfaisant les contraintes (pente minimale, pente maximale, rayon minimal et distance au sol) sur 20 points successifs calculés pour différentes valeurs entre 0 et 1 du paramètre t des deux courbes de Bézier. Les contraintes sont de couleur verte si elles sont satisfaites et rouge dans le cas contraire. La courbe correspondant à la trajectoire est représentée en figure 3.

Chaque point est caractérisé par 3 coordonnées spatiales, un cap et une pente. Partant du point initial A et se terminant au point d'atterrissage G, la trajectoire passe par le point intermédiaire D de jonction des deux courbes de Bézier.

Les paramètres $K0+$, $K1-$, $K1+$, $K-$ correspondent respectivement aux distances dans le plan horizontal entre les points A et B, C et D, D et E et F et G, et le paramètre K la distance relative du point D par rapport aux points B et F tous les trois alignés (condition C_2) ; le cap et la pente en D constituent les deux derniers paramètres de l'optimisation.

Trajectoire

	X	Y	Z	Cap °	Pente
A	1000	2000	100	#DIV/0!	20,00%
B	1000	2144,37	71,1269	51,2108	0,90%
C	-625,743	121,571	47,897	11,5598	5,03%
D	124,316	274,988	9,40974	11,5598	5,03%
E	204,205	291,328	5,31049	54,4963	1,41%
F	-6,16497	-3,55934	0,21356	30	3,00%
G	0	0	0		

	X	Y	Z	Cap °	Pente
A	1000	2000	100	0	20%
		K0+ 144,365		K1- 765,589	
D	124,316	274,988	9,40974	78,4402	5,03%
		K1+ 81,5423		K- 7,11869	
G	0	0	0	60	3%

Courbe de Bézier

t	X	Y	Z	Cap °	Pente	H Relief	Δ alt.	X'	Y'	X''	Y''	R	R min	Δ R	Longueur
0	1000	2000	100	21,1959	17,73%	4,308181	95,6918	0	433,096	-9754,46	-13003	19,2294	0,5	18,7294	48,76814
0,1	955,229	1982,64	91,4865	45,7232	4,90%	4,308181	87,1783	-855,4	-736,898	-7353,53	-10396,9	414,195	0,5	413,695	169,66574
0,2	836,923	1861,31	83,1861	49,8905	3,15%	4,308181	78,8779	-1470,71	-1646,29	-4952,6	-7790,91	3255,32	0,5	3254,82	260,63718
0,3	669,091	1662,07	74,9736	52,4023	2,60%	3,258088	71,7155	-1845,92	-2295,08	-2551,68	-5184,89	6878,27	0,5	6877,77	317,0136
0,4	475,742	1410,98	66,7234	54,8635	2,48%	3,258088	63,4653	-1981,04	-2683,27	-150,749	-2578,87	7887,13	0,5	7886,63	338,67556
0,5	280,886	1134,1	58,3102	58,0728	2,67%	1,729861	56,5803	-1876,07	-2810,85	2250,18	27,152	6151,58	0,5	6151,08	326,0259
0,6	108,531	857,493	49,6085	63,3058	3,25%	2,019619	47,5889	-1531,01	-2677,84	4651,11	2633,17	3484,23	0,5	3483,73	280,28032
0,7	-17,3122	607,219	40,4931	74,3803	4,70%	0	40,4931	-945,849	-2284,22	7052,03	5239,2	1354,93	0,5	1354,43	205,69737
0,8	-72,6354	409,336	30,8384	-71,826	8,21%	0	30,8384	-120,599	-1630	9452,96	7845,22	301,915	0,5	301,415	126,12404
0,9	-33,4289	289,906	20,5191	-5,4024	7,01%	0	20,5191	944,744	-715,177	11853,9	10451,2	90,6548	0,5	90,1548	158,83817
0	124,316	274,988	9,40974	-13,638	7,73%	0	9,40974	239,665	49,0207	-1741,55	-1867,36	-40,4204	0,5	39,9204	16,271317
0,1	140,082	271,163	8,15592	-85,778	6,77%	0	8,15592	80,7139	-119,426	-1437,47	-1501,56	-10,2261	0,5	9,72607	18,935151
0,2	141,473	252,322	6,87752	71,7752	3,99%	0	6,87752	-47,8296	-251,291	-1133,4	-1135,76	-72,6211	0,5	72,1211	31,818343
0,3	131,53	222,124	5,60983	64,3032	2,90%	0	5,60983	-145,965	-346,577	-829,321	-769,952	-303,838	0,5	303,338	42,074902
0,4	113,293	184,226	4,38814	60,7482	2,37%	0	4,38814	-213,694	-405,282	-525,246	-404,147	-760,247	0,5	759,747	48,08247
0,5	89,8045	142,287	3,24774	58,7317	2,07%	0	3,24774	-251,015	-427,406	-221,17	-38,3427	-1434,28	0,5	1433,78	49,525468
0,6	64,104	99,964	2,2239	57,5051	1,88%	0	2,2239	-257,928	-412,95	82,9056	327,462	-2297,99	0,5	2297,49	46,304419
0,7	39,2325	60,916	1,35193	56,8176	1,78%	0	1,35193	-234,433	-361,914	386,981	693,266	-3568,12	0,5	3567,62	38,378844
0,8	18,2308	28,8006	0,66709	56,7893	1,80%	0	0,66709	-180,532	-274,297	691,057	1059,07	-21578,8	0,5	21578,3	25,73099
0,9	4,13976	7,27592	0,20469	60,3616	2,45%	0	0,20469	-96,2221	-150,1	995,132	1424,88	462,121	0,5	461,621	8,3736792
1	-2,1E-15	-1,2E-15	7,1E-17	60,3616	2,45%	0	7,1E-17	18,4949	10,678	1299,21	1790,68	0,5061	0,5	0,0061	2557,2216

Pente min :	0,90%
	3%
Pente max :	17,73%
	35%

Figure 2. Feuille de calcul

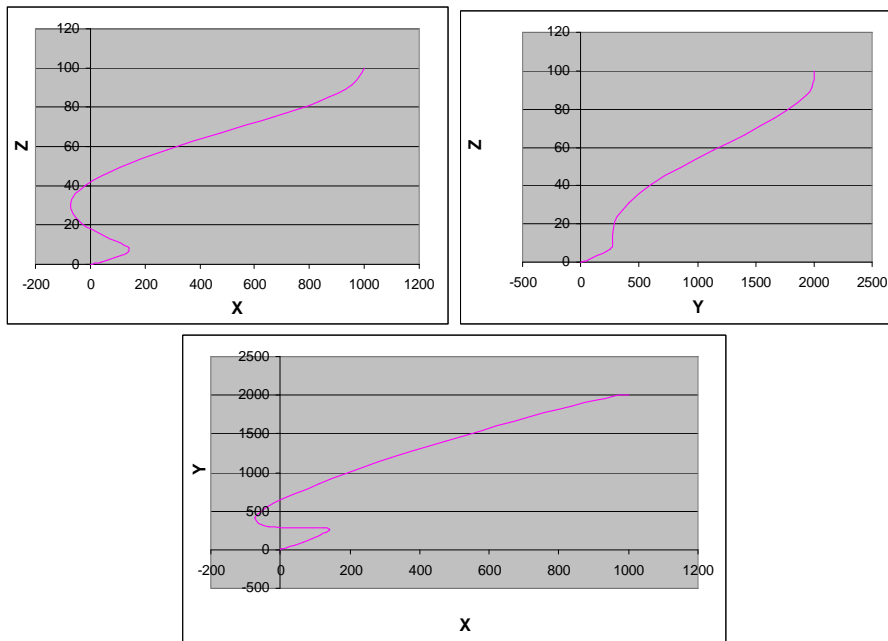


Figure 3. Trajectoire

La trajectoire optimisée est obtenue par l'outil après une centaine de boucles de son algorithme.



Le fichier Excel correspondant est disponible par simple clic sur l'icône suivant : Trajectoire d'urgence