# TP SdF N° 37

# Remplacement de matériels non réparables

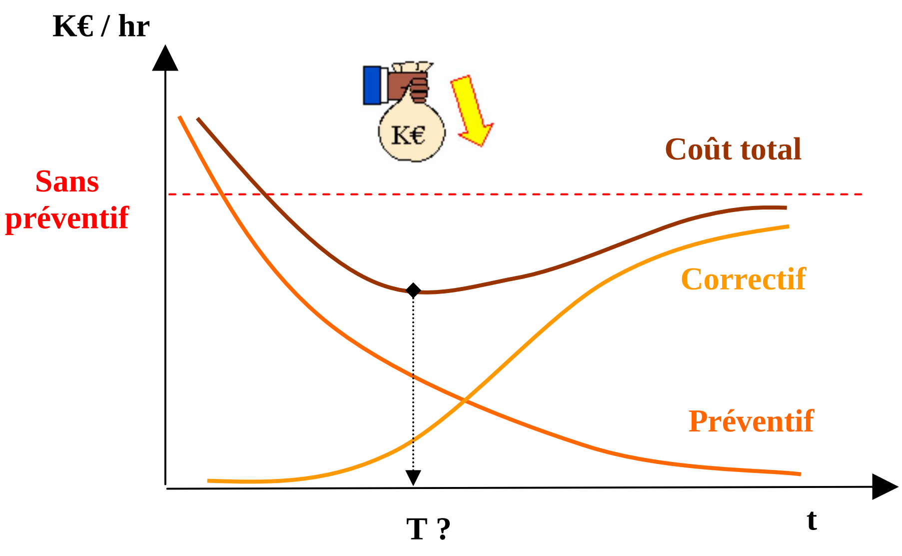
Ce TP porte sur différentes lois de mortalité de matériels non réparables, l'ajustement de leurs paramètres à partir de données de retour d'expérience et l'instant optimum de remplacement des matériels à dates ou âges fixes.

----

**1 – Présenter diverses lois de mortalité applicables aux matériels non réparables.**

**2 – Simuler un jeu de 100 durées de fonctionnement d'un matériel soumis à deux modes de défaillance indépendants et ajuster les différentes lois de mortalité à partir de celui-ci.**

**3 – Sachant le coût de remplacement du matériel en préventif ($C_1$) et correctif ($C_2 > C_1$), optimiser l'instant de son remplacement à dates et à âges fixes**



## 1 - Lois de mortalité applicables aux matériels non réparables

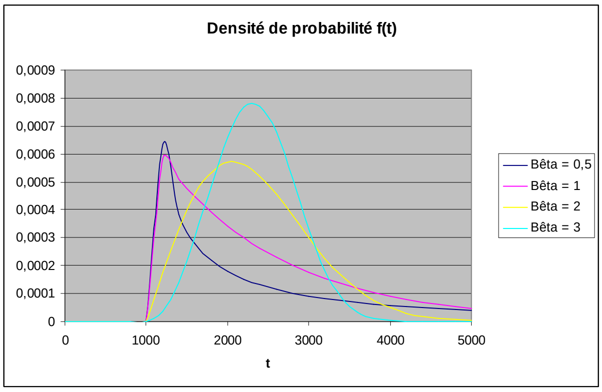
La loi de Weibull est une loi de probabilité à 3 paramètres qui est très utilisée pour modéliser la durée de vie des produits en raison de sa grande flexibilité. Elle est caractérisée par la densité de probabilité :

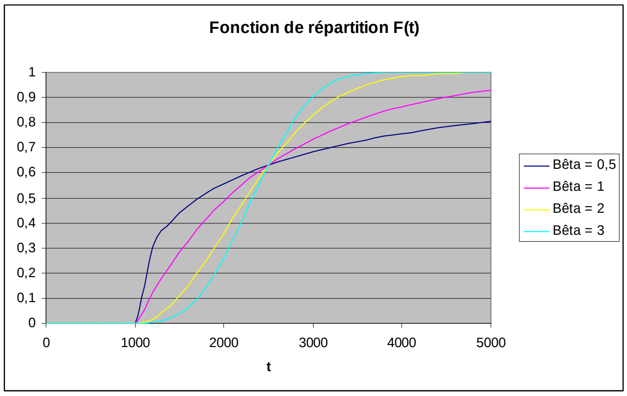
$$f(t) = \lambda(t)\, R(t) = \beta(t-\gamma)^{\beta-1}/\sigma^{\beta} \exp(-[(t-\gamma)/\sigma]^{\beta})$$

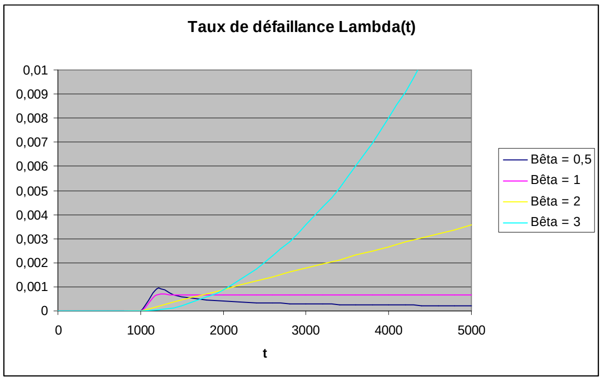
$\beta$ est le paramètre de forme ($\beta > 0$), $\sigma$ le paramètre d'échelle ($\sigma > 0$) et $\gamma$ le paramètre de localisation de la distribution par rapport à l'origine ($t > \gamma$).

Selon la valeur de $\beta$, la loi de Weibull peut représenter l'une des trois phases de la vie d'un matériel :

- période de jeunesse si $\beta < 1$ soit **$\lambda$(t)** décroissant,
- vie utile si $\beta = 1$ soit **$\lambda$** constant,
- période d'usure si $\beta > 1$ soit **$\lambda$(t)** croissant.




Afin de considérer globalement plusieurs phases de vie d'un matériel ou plusieurs modes de défaillances indépendants (matériel regroupant plusieurs matériels), la loi de Weibull peut se décliner en toute une famille de lois de mortalité :

- Multi Weibull : $\lambda(t) = \sum \beta_i(t-\gamma_i)^{\beta i-1}/\sigma_i^{\beta i}$ $\quad R(t) = \prod \exp(-[(t-\gamma_i)/\sigma_i]^{\beta i})$
- Bi-Weibull d'Hasting[1] à 5 paramètres : $\lambda(t) = \beta_0 t^{\beta 0-1}/\sigma_0^{\beta 0} + \beta(t-\gamma)^{\beta-1}/\sigma^{\beta}$ $\quad \gamma_1 = 0$
- Loi de Bertholon[2] à 4 paramètres : $\lambda(t) = 1/\sigma_0 + \beta(t-\gamma)^{\beta-1}/\sigma^{\beta}$ $\quad \gamma_1 = 0$ et $\beta_1 = 1$
- Bi-Weibull simplifié[3] à 3 paramètres : $\lambda(t) = 1/\sigma_0 + \beta t^{\beta-1}/\sigma^{\beta}$ $\quad \gamma_1$ et $\gamma_2 = 0$ et $\beta_1 = 1$

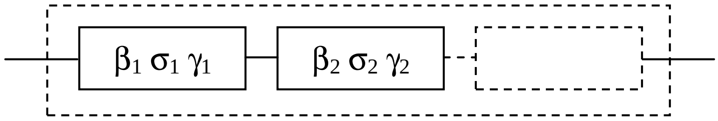
[1] Hastings N.A.J. 2003, Component reliability, replacement, and cost analysis with incomplete failure data. In Case Studies in Reliability and Maintenance, W. R. Blischke, D. N. Prabhakar Murthy (eds.), Wiley

[2] Ziani R., Antoni M., Modélisation du vieillissement des appareils de signalisation par le modèle de BERTHOLON et optimisation de la maintenance, lambda mu 16, 7-9 octobre 2008, Avignon

[3] M.Vansnick, P-E Labeau - Simplified Bi-Weibull function to model ageing – LM17, La Rochelle, 2010

## 2 – Simulation d'un jeu de données et ajustement des différentes lois de mortalité

La durée de fonctionnement d'un équipement soumis à plusieurs modes de défaillance peut être simulée en considérant la plus petite des valeurs simulées représentatives des différents modes.




Soit sous Excel dans le cas de 2 modes de défaillance indépendants :

$$t_i = \text{MIN}(\gamma_1 + \sigma_1*(-\text{LN(ALEA())})\hat{}(1/\beta_1));\gamma_2 + \sigma_2*(-\text{LN(ALEA())})\hat{}(1/\beta_2)))$$

Le jeu de 100 valeurs est obtenu en recopiant autant de fois cette formule, puis en figeant les valeurs obtenues à l'issue d'un calcul.

A partir du même jeu de données simulées, les diverses lois de mortalité peuvent être ajustées par la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à maximiser le produit des densités (vraisemblance) obtenues pour chacune des données ou plutôt la somme des logarithmes des densités (LNV) pour éviter des problèmes numériques (produit de très petites valeurs).

Pour s'affranchir de la condition $t \geq \gamma$, on peut exprimer la fiabilité et le taux de défaillance au moyen des formules suivantes, sous Excel :

$$\lambda(T) = \text{Bêta*MAX(0;T-Gamma)\^{}(Bêta-1)/Sigma\^{}Bêta}$$

$$R(T) = \text{EXP(-((MAX(0;T-Gamma)/Sigma)\^{}Bêta))}$$

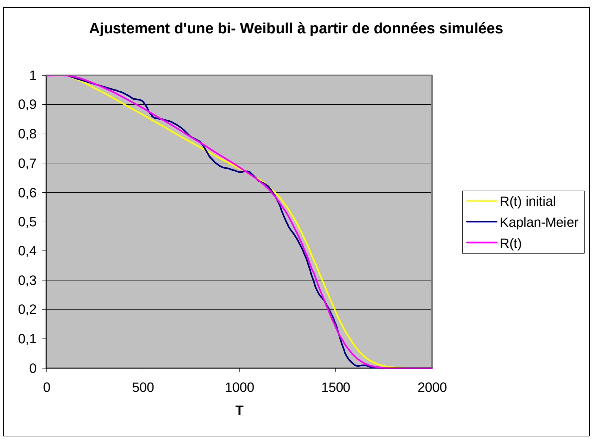
Par ailleurs, le logarithme d'une valeur nulle n'étant pas défini sous Excel, il est nécessaire d'effectuer un test avant de sommer les logarithmes.

A partir d'un même jeu de données simulées, les ajustements des différentes lois de mortalité ont été réalisés, ci-après, au moyen de l'outil d'optimisation global GENCAB.

### Bi-Weibull (deux modes de défaillance indépendants)

| Lois simulées | | Lois ajustées | | LNV |
|---|---|---|---|---|
| Bêta 1 : | 1,2 | Bêta1: | 1,427937 | |
| Sigma 1 : | 2000 | Sigma1: | 1786,288 | |
| Gamma 1 : | 100 | Gamma1: | 98,37352 | |
| Bêta 2 : | 3,5 | Bêta2: | 4,029024 | |
| Sigma 2 : | 500 | Sigma2: | 523,6877 | |
| Gamma 2 : | 1000 | Gamma2: | 944,7846 | -724,1911 |

| T simulé<br>1290 | Lbd1 | Lbd2 | R1 | R2 | f(T) | LN(f(T)) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1385 | 0,000695 | 0,004552 | 0,534705 | 0,608001 | 0,001706 | -6,373723 |
| 1525 | 0,000726 | 0,010482 | 0,484213 | 0,22114 | 0,0012 | -6,725286 |
| 813 | 0,00054 | 0 | 0,763265 | 1 | 0,000412 | -7,794041 |
| 1494 | 0,000719 | 0,008875 | 0,495187 | 0,298422 | 0,001418 | -6,558674 |
| 1316 | 0,000679 | 0,002717 | 0,56064 | 0,778421 | 0,001482 | -6,51438 |
| 530 | 0,000435 | 0 | 0,876708 | 1 | 0,000382 | -7,871054 |
| 1249 | 0,000662 | 0,001486 | 0,586431 | 0,893817 | 0,001126 | -6,788968 |
| 1547 | 0,000731 | 0,011749 | 0,476426 | 0,172706 | 0,001027 | -6,881267 |
| 470 | 0,000408 | 0 | 0,899064 | 1 | 0,000367 | -7,90953 |
| 1381 | 0,000694 | 0,004412 | 0,536383 | 0,620429 | 0,001699 | -6,377582 |
| 720 | 0,000509 | 0 | 0,801283 | 1 | 0,000408 | -7,804881 |
| 1390 | 0,000696 | 0,004702 | 0,532948 | 0,594833 | 0,001711 | -6,370558 |
| 1392 | 0,000696 | 0,004782 | 0,532031 | 0,587893 | 0,001713 | -6,369266 |
| 520 | 0,000431 | 0 | 0,88069 | 1 | 0,000379 | -7,877025 |
| 723 | 0,00051 | 0 | 0,800004 | 1 | 0,000408 | -7,804325 |
| 829 | 0,000545 | 0 | 0,756673 | 1 | 0,000413 | -7,793244 |
| 535 | 0,000438 | 0 | 0,87461 | 1 | 0,000383 | -7,868043 |
| 1250 | 0,000662 | 0,001493 | 0,586261 | 0,893233 | 0,001129 | -6,78684 |
| 562 | 0,000449 | 0 | 0,864408 | 1 | 0,000388 | -7,854616 |
| 847 | 0,000551 | 0 | 0,748911 | 1 | 0,000413 | -7,792672 |
| 1272 | 0,000668 | 0,001854 | 0,5775 | 0,860111 | 0,001253 | -6,682293 |
| 121 | 0,000124 | 0 | 0,997996 | 1 | 0,000124 | -8,995227 |
| 871 | 0,000559 | 0 | 0,739124 | 1 | 0,000413 | -7,792493 |

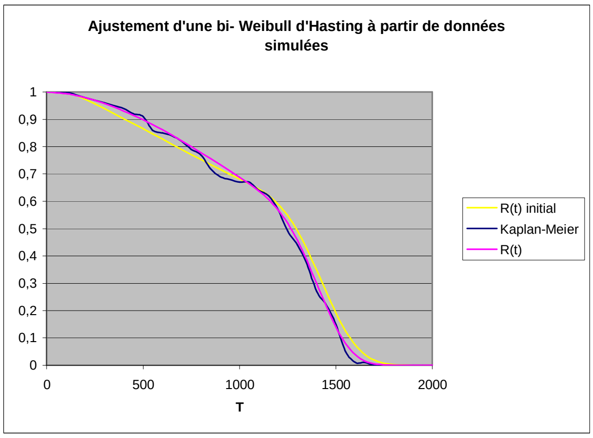


# Bi-Weibull d'Hasting (deux modes de défaillance indépendants)

| Lois simulées | | Lois ajustées | | LNV |
|---|---|---|---|---|
| Bêta 1 : | 1,2 | Bêta1: | 1,800162 | |
| Sigma 1 : | 2000 | Sigma1: | 1726,992 | |
| Gamma 1 : | 100 | | | |
| Bêta 2 : | 3,5 | Bêta2: | 4,166893 | |
| Sigma 2 : | 500 | Sigma2: | 529,5246 | |
| Gamma 2 : | 1000 | Gamma2: | 947,7399 | -724,7628 |

**T simulé**

| 1472 | Lbd1 | Lbd2 | R1 | R2 | f(T) | LN(f(T)) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1385 | 0,000874 | 0,004297 | 0,510529 | 0,636945 | 0,001681 | -6,388153 |
| 1525 | 0,000944 | 0,01033 | 0,449703 | 0,239189 | 0,001213 | -6,714972 |
| 813 | 0,00057 | 0 | 0,773016 | 1 | 0,000441 | -7,726853 |
| 1494 | 0,000928 | 0,008672 | 0,462946 | 0,320988 | 0,001427 | -6,552482 |
| 1316 | 0,000839 | 0,002495 | 0,541591 | 0,801999 | 0,001448 | -6,537453 |
| 530 | 0,000405 | 0 | 0,887576 | 1 | 0,00036 | -7,930711 |
| 1249 | 0,000804 | 0,00132 | 0,572279 | 0,908922 | 0,001105 | -6,807731 |
| 1547 | 0,000955 | 0,011645 | 0,440304 | 0,187338 | 0,001039 | -6,869208 |
| 470 | 0,000368 | 0 | 0,90829 | 1 | 0,000334 | -8,003195 |
| 1381 | 0,000871 | 0,004158 | 0,512544 | 0,649217 | 0,001674 | -6,39281 |
| 720 | 0,000518 | 0 | 0,812981 | 1 | 0,000421 | -7,7733 |
| 1390 | 0,000876 | 0,004446 | 0,50842 | 0,623905 | 0,001688 | -6,384131 |
| 1392 | 0,000877 | 0,004525 | 0,507318 | 0,617017 | 0,001691 | -6,382382 |
| 520 | 0,000399 | 0 | 0,891316 | 1 | 0,000355 | -7,942462 |
| 723 | 0,000519 | 0 | 0,811659 | 1 | 0,000422 | -7,771448 |
| 829 | 0,000579 | 0 | 0,765947 | 1 | 0,000444 | -7,720455 |
| 535 | 0,000408 | 0 | 0,885597 | 1 | 0,000362 | -7,9247 |
| 1250 | 0,000805 | 0,001326 | 0,572077 | 0,908394 | 0,001107 | -6,805691 |
| 562 | 0,000424 | 0 | 0,875887 | 1 | 0,000372 | -7,897117 |
| 847 | 0,00059 | 0 | 0,757571 | 1 | 0,000447 | -7,713489 |
| 1272 | 0,000816 | 0,001668 | 0,561678 | 0,878211 | 0,001225 | -6,70452 |
| 121 | 0,000125 | 0 | 0,991632 | 1 | 0,000124 | -8,998951 |
| 871 | 0,000603 | 0 | 0,746936 | 1 | 0,00045 | -7,70555 |

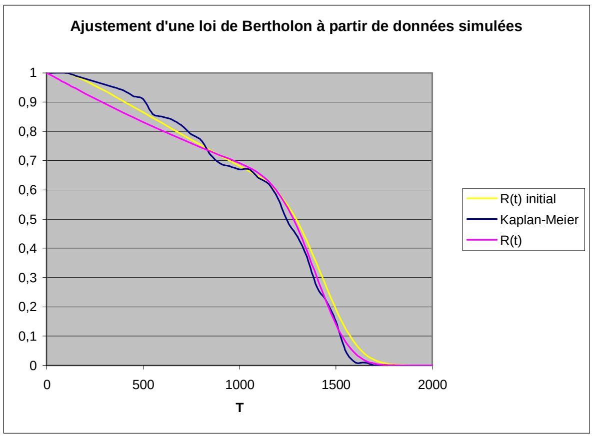



# Bertholon (deux modes de défaillance indépendants)

| Lois simulées | | Lois ajustées | | LNV |
|---|---|---|---|---|
| Bêta 1 : | 1,2 | | | |
| Sigma 1 : | 2000 | Sigma1: | 2717,722 | |
| Gamma 1 : | 100 | | | |
| Bêta 2 : | 3,5 | Bêta2: | 3,993246 | |
| Sigma 2 : | 500 | Sigma2: | 546,4265 | |
| Gamma 2 : | 1000 | Gamma2: | 904,3879 | -730,1697 |

**T simulé**

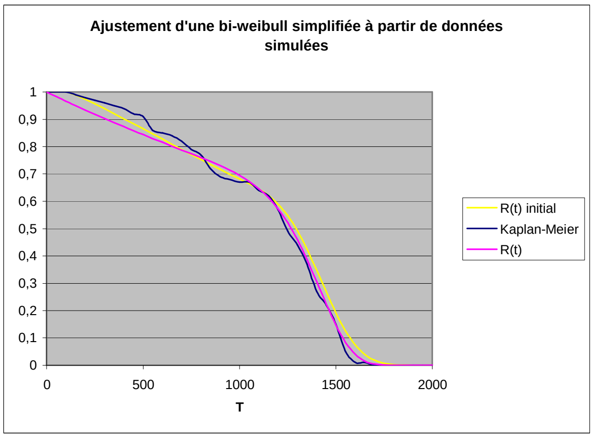
| 472 | Lbd1 | Lbd2 | R1 | R2 | f(T) | LN(f(T)) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1385 | 0,000368 | 0,004982 | 0,600687 | 0,548892 | 0,001764 | -6,340162 |
| 1525 | 0,000368 | 0,010686 | 0,57061 | 0,19011 | 0,001199 | -6,726174 |
| 813 | 0,000368 | 0 | 0,741531 | 1 | 0,000273 | -8,206588 |
| 1494 | 0,000368 | 0,009165 | 0,577159 | 0,258536 | 0,001423 | -6,555331 |
| 1316 | 0,000368 | 0,003134 | 0,616128 | 0,72383 | 0,001562 | -6,461922 |
| 530 | 0,000368 | 0 | 0,822819 | 1 | 0,000303 | -8,102568 |
| 1249 | 0,000368 | 0,001841 | 0,631526 | 0,853094 | 0,00119 | -6,733944 |
| 1547 | 0,000368 | 0,011875 | 0,565957 | 0,147924 | 0,001025 | -6,883104 |
| 470 | 0,000368 | 0 | 0,841082 | 1 | 0,000309 | -8,080616 |
| 1381 | 0,000368 | 0,004843 | 0,601686 | 0,561202 | 0,00176 | -6,342594 |
| 720 | 0,000368 | 0 | 0,767247 | 1 | 0,000282 | -8,172496 |
| 1390 | 0,000368 | 0,00513 | 0,599642 | 0,535915 | 0,001767 | -6,338501 |
| 1392 | 0,000368 | 0,005209 | 0,599096 | 0,529101 | 0,001768 | -6,337999 |
| 520 | 0,000368 | 0 | 0,825994 | 1 | 0,000304 | -8,098717 |
| 723 | 0,000368 | 0 | 0,766362 | 1 | 0,000282 | -8,17365 |
| 829 | 0,000368 | 0 | 0,737182 | 1 | 0,000271 | -8,21247 |
| 535 | 0,000368 | 0 | 0,821159 | 1 | 0,000302 | -8,104587 |
| 1250 | 0,000368 | 0,001848 | 0,631424 | 0,852404 | 0,001192 | -6,731739 |
| 562 | 0,000368 | 0 | 0,8132 | 1 | 0,000299 | -8,114327 |
| 847 | 0,000368 | 0 | 0,732097 | 1 | 0,000269 | -8,219391 |
| 1272 | 0,000368 | 0,002234 | 0,626187 | 0,813991 | 0,001326 | -6,625217 |
| 121 | 0,000368 | 0 | 0,956304 | 1 | 0,000352 | -7,952229 |
| 871 | 0,000368 | 0 | 0,725738 | 1 | 0,000267 | -8,228115 |



## Bi-Weibull simplifiée (deux modes de défaillance indépendants)

| Lois simulées | | Lois ajustées | | |
|---|---|---|---|---|
| Bêta 1 : | 1,2 | | | |
| Sigma 1 : | 2000 | Sigma1: | 2933,159 | |
| Gamma 1 : | 100 | | | |
| Bêta 2 : | 3,5 | Bêta2: | 10,10658 | |
| Sigma 2 : | 500 | Sigma2: | 1450,336 | LNV |
| Gamma 2 : | 1000 | | | -730,0101 |

| T simulé | Lbd1 | Lbd2 | R1 | R2 | f(T) | LN(f(T)) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 312 | | | | | | |
| 1385 | 0,000341 | 0,004585 | 0,6236 | 0,533457 | 0,001639 | -6,413904 |
| 1525 | 0,000341 | 0,010992 | 0,594616 | 0,190447 | 0,001283 | -6,658249 |
| 813 | 0,000341 | 3,57E-05 | 0,757998 | 0,997134 | 0,000285 | -8,164231 |
| 1494 | 0,000341 | 0,009116 | 0,600936 | 0,259923 | 0,001477 | -6,51763 |
| 1316 | 0,000341 | 0,002879 | 0,638439 | 0,687297 | 0,001413 | -6,561988 |
| 530 | 0,000341 | 7,28E-07 | 0,83469 | 0,999962 | 0,000285 | -8,162436 |
| 1249 | 0,000341 | 0,001788 | 0,65321 | 0,801715 | 0,001115 | -6,798931 |
| 1547 | 0,000341 | 0,012543 | 0,590121 | 0,146616 | 0,001115 | -6,79916 |
| 470 | 0,000341 | 2,45E-07 | 0,851841 | 0,999989 | 0,000291 | -8,143483 |
| 1381 | 0,000341 | 0,004451 | 0,624561 | 0,544449 | 0,001629 | -6,419613 |
| 720 | 0,000341 | 1,19E-05 | 0,782324 | 0,999156 | 0,000276 | -8,195994 |
| 1390 | 0,000341 | 0,004729 | 0,622595 | 0,52183 | 0,001647 | -6,408615 |
| 1392 | 0,000341 | 0,004807 | 0,62207 | 0,515708 | 0,001651 | -6,406139 |
| 520 | 0,000341 | 6,07E-07 | 0,837673 | 0,999969 | 0,000286 | -8,159215 |
| 723 | 0,000341 | 1,23E-05 | 0,781487 | 0,999118 | 0,000276 | -8,195746 |
| 829 | 0,000341 | 4,26E-05 | 0,753878 | 0,996512 | 0,000288 | -8,152081 |
| 535 | 0,000341 | 7,99E-07 | 0,83313 | 0,999958 | 0,000285 | -8,164102 |
| 1250 | 0,000341 | 0,001794 | 0,653112 | 0,801085 | 0,001117 | -6,797179 |
| 562 | 0,000341 | 1,24E-06 | 0,825645 | 0,999931 | 0,000282 | -8,171864 |
| 847 | 0,000341 | 5,23E-05 | 0,749059 | 0,995626 | 0,000293 | -8,134499 |
| 1272 | 0,000341 | 0,002113 | 0,648091 | 0,766504 | 0,001219 | -6,709906 |
| 121 | 0,000341 | 1,08E-12 | 0,959447 | 1 | 0,000327 | -8,025233 |
| 871 | 0,000341 | 6,72E-05 | 0,743029 | 0,994223 | 0,000302 | -8,10672 |




**Remarques**

- Les écarts entre les paramètres des lois ayant servi à simuler le jeu de données et ceux résultant de l'ajustement de la bi-weibull ont essentiellement pour origine le bruit de simulation.

- La qualité de l'ajustement dépend de la précision du modèle, notamment pour le premier mode de défaillance.

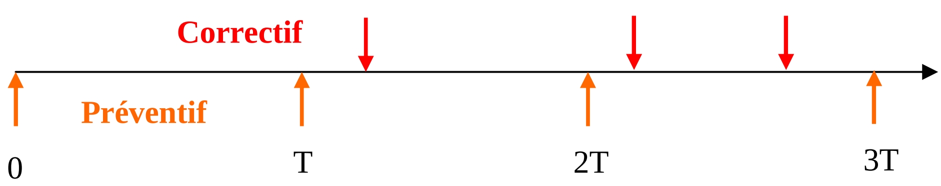
- Le modèle bi-Weibull simplifié à 3 paramètres s'ajuste aussi bien que le modèle Bertholon à 4 paramètres, mais la valeur de son paramètre $\beta$ n'a aucune signification.

### 3 – Optimisation de l'instant de remplacement

La statégie de remplacement peut suivre différentes stratégies, dont le remplacement à dates fixes et celui à âges fixes.

### 3.1 – Remplacement à dates fixes

Le remplacement à dates fixes facilite la synchronisation des actions de maintenance entre des matériels différents mais présente l'inconvénient de remplacer des matériels ayant éventuellement bénéficié d'une maintenance corrective.




**Remplacement à dates fixes**

Durant une période T de remplacements préventifs, l'espérance de coût est : $C = C_1 + N_2 * C_2$

Avec $N_2$ l'espérance du nombre de défaillances pandant T soit :

$$N_2 = \int_0^T f(t_1)\, R(T-t_1)\, dt_1 + 2 \int_0^T f(t_1)\, dt_1 \int_{t1}^T f(t_2 - t_1)\, R(T-t_2)\, dt_2 + 3\ldots$$

Pour une période pas trop longue on peut se limiter à une seule défaillance entre deux remplacements préventifs soit :

$$C \approx C_1 + [1-R(T)]\, C_2 \quad \text{ou le coût horaire : } C_{horaire} \approx (C_1 + [1-R(T)]\, C_2) / T$$

que l'on peut minimiser comme dans l'exemple suivant relatif à la bi-Weibull précédemment ajustée :

# Remplacement optimal à dates fixes

## Bi-Weibull (deux modes de défaillance indépendants)

**Lois ajustées**

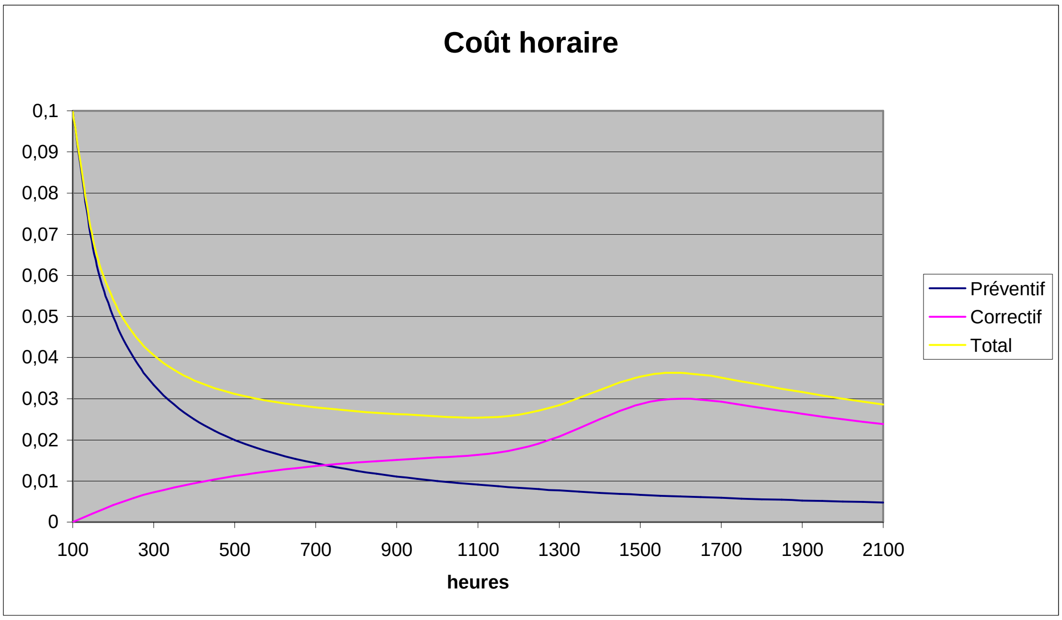
| | |
|---|---|
| Bêta1: | 1,42793749 |
| Sigma1: | 1786,28844 |
| Gamma1: | 98,3735229 |
| Bêta2: | 4,02902433 |
| Sigma2: | 523,687677 |
| Gamma2: | 944,784614 |

**Coût de remplacement**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **C1 :** | 10 | K€ | **Préventif** |
| **C2 :** | 50 | K€ | **Correctif** |

**Période de remplacement**

| | | |
|---|---|---|
| **T :** | **1092,58827** | hr |
| **Coût** horaire **:** | **0,02542065** | K€ / hr |

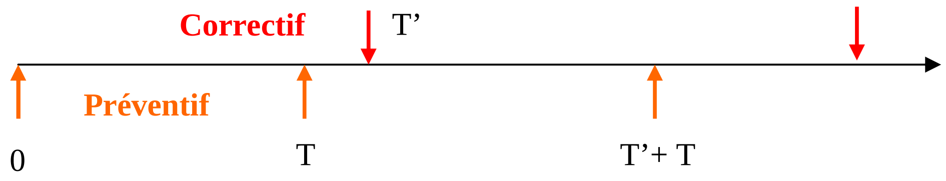




Dates fixes

*Fichier disponible par simple clic de souris sur l'icône*

### 3.2 – Remplacement à âges fixes

Le remplacement à âges fixes réduit le nombre de remplacements mais rend ces derniers spécifiques à chaque matériel.




**Remplacement à âges fixes**

Sachant qu'un remplacement est réalisé au plus tard à l'âge T, la durée moyenne entre deux remplacements peut se calculer de la manière suivante :

$$MTBR = T\,R(T) + \int_0^T t\,f(t)\,dt$$

Cette expression peut faire l'objet d'une intégration par partie :

$$MTBR = T\,R(T) - \int_0^T t\,dR/dt\,dt = T\,R(T) - [tR(t)]_0^T + \int_0^T R(t)\,dt = \int_0^T R(t)\,dt$$

On retrouve l'expression du MTTF quand T tend vers l'infini : $MTTF = \int_0^{+\infty} R(t)\,dt$

L'espérance de coût de chaque remplacement est : $C = C_1\,R(T) + C_2\,[1-R(T)]$

et donc celui du coût horaire : $C_{horaire} = (\,C_1\,R(T) + C_2\,[1-R(T)]\,) / \int_0^T R(t)$

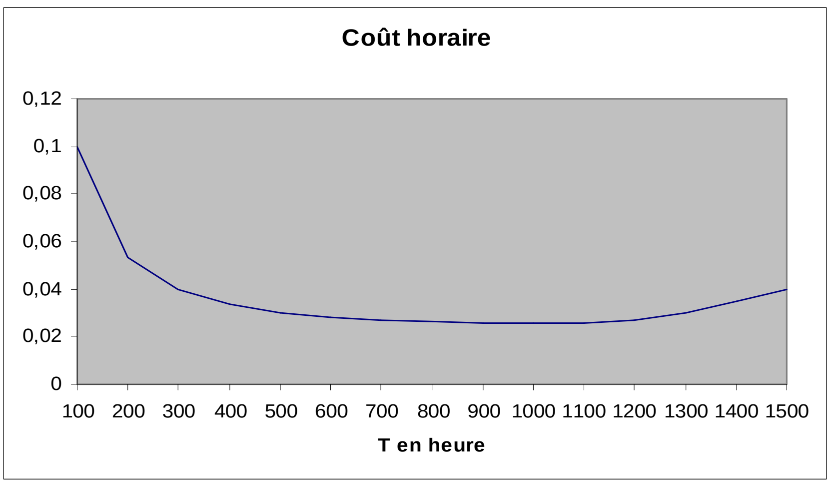
A défaut de pouvoir s'exprimer par une simple expression analytique, la durée moyenne entre deux remplacements peut se calculer de manière approchée par une somme de termes entre 0 et T. L'âge optimum est ainsi optimisé dans l'exemple suivant relatif à la bi-Weibull précédemment ajustée (MTBR calculé par une somme de 100 termes) :

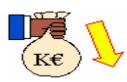
## Remplacement optimal à âges fixes

### Bi-Weibull (deux modes de défaillance indépendants)

| Lois ajustées | |
|---|---|
| Bêta1: | 1,42793749 |
| Sigma1: | 1786,28844 |
| Gamma1: | 98,3735229 |
| Bêta2: | 4,02902433 |
| Sigma2: | 523,687677 |
| Gamma2: | 944,784614 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Coût de remplacement préventif | C1 : | 10 | K€ |
| correctif | C2 : | 50 | K€ |
| Age de remplacement | T : | 1034,95 | hr |
| Durée moyenne entre 2 remplacements | MTBR : | 899,00 | hr |
| | Coût $_{horaire}$ : | 0,02574956 | K€ / hr |



Ages fixes

**Remarque :**

Si l’âge de remplacement obtenu dans cet exemple (1035 heures) est bien inférieur à la période de remplacement trouvée précédemment (1093 heures), l’écart inversé du coût horaire s’explique par l’imprécision de la première estimation (les pannes multiples entre interventions ayant été négligées).