

TP N° 39

Facteur d'accélération associé à une loi normale ou lognormale

Utilisés pour diminuer la durée et le coût des essais, les facteurs d'accélération (Arrhenius, Peck, Basquin, Norris-Landzberg...) sont tous fondés sur l'hypothèse que le stress ne change que l'échelle de la courbe de fiabilité.

Or certaines normes et outils largement utilisés ne traitent les lois normale ou lognormale qu'en jouant sur l'un des paramètres en faisant l'hypothèse que le stress n'a pas d'effet sur le second.

Ce TP a pour objet d'évaluer cette apparente contradiction.

1 – Rappeler la théorie des essais accélérés et préciser la notion de facteur d'accélération

2 – Simuler des jeux de durées de fonctionnement d'équipements opérés à différentes températures, 25° C (prise pour référence), 50° C et 75° C, suivant diverses lois (Weibull à 2 paramètres, normale et lognormale) et du facteur d'accélération d'Arrhenius.

3 – Retrouver les paramètres de ces lois et l'énergie d'activation au moyen d'un ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance.

1 – Théorie des essais accélérés et facteur d'accélération

Les essais accélérés sont des essais de fiabilité durant lesquels les matériels sont soumis à des conditions d'environnement ou d'utilisation plus sévères que celles de leur vie opérationnelle afin de réduire la durée des essais. Ils font intervenir les mêmes phénomènes de dégradation que ceux que les matériels subissent en opération et diffèrent, en cela, des essais aggravés menés hors du domaine de qualification pour évaluer la robustesse de la conception et en révéler les points faibles.

Ces essais s'appuient principalement sur la théorie du modèle Standard de Vie Accélérée¹ (S.V.A) qui fait l'hypothèse qu'un stress ou une combinaison de plusieurs stress ne change que l'échelle de la courbe de fiabilité, comme l'illustre la figure 1.

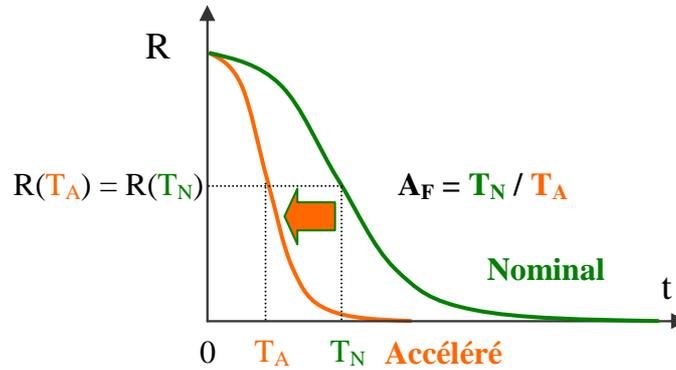


Figure 1. Modèle Standard de Vie Accélérée

Pour une même fiabilité, le facteur d'accélération A_F permet alors de passer simplement d'une durée de fonctionnement en conditions accélérées à celle en conditions nominales, et inversement.

De même est-il aisé de passer des fonctions de fiabilité $R(t)$, répartition $F(t)$, densité $f(t)$ et taux de défaillance $\lambda(t)$ des conditions accélérées à des conditions de référence :

$$R(t) = R_{\text{ref}}(A_F t) \quad F(t) = F_{\text{ref}}(A_F t) \quad f(t) = A_F f_{\text{ref}}(A_F t) \quad \lambda(t) = A_F \lambda_{\text{ref}}(A_F t)$$

En effet :

$$R(t) = R_{\text{ref}}(A_F t) \quad F(t) = 1 - R(t) = F_{\text{ref}}(A_F t) \quad f(t) = dF/dt(t) = A_F f_{\text{ref}}(A_F t)$$

$$f(t) = \lambda(t) F(t) = A_F \lambda_{\text{ref}}(A_F t) F_{\text{ref}}(A_F t)$$

Le facteur d'accélération correspond à un rapport de vitesses de dégradation sous différents niveaux de stress dont la forme générale est $V(s) = \exp[\beta_0 + \beta_1 z(S)]$. De nombreuses lois d'accélération ont ainsi été définies dont la loi de d'Arrhenius pour la température : $V(T) = \exp(Ea/KT)$ avec Ea l'énergie d'activation et K la constante de Boltzmann.

2 – Simulation d'un jeu d'essais

Trois jeux de durées de fonctionnement d'une centaine de valeurs réparties entre les 3 températures, ont été simulés par tirage aléatoire et inversion des lois de Weibull ($F(t) = \exp(-((t-\gamma)/\sigma)^\beta)$), normale et lognormale, puis application du facteur d'accélération (avec $Ea = 0,7$; $K = 8,617 \cdot 10^{-5}$ Kelvin/eV et $T = 298, 323$ et 348 ° K), soit sous Excel:

$$\begin{aligned} &= (\gamma + \sigma * (-\text{LN}(\text{ALEA()}))^{(1/\beta)}) / \text{EXP}((Ea/K) * (1/298 - 1/T)) \quad \text{avec } \gamma = 0 \\ &= \text{LOI.NORMALE.INVERSE}(\text{ALEA}(); m; \sigma) / \text{EXP}((Ea/K) * (1/298 - 1/T)) \\ &= \text{LOI.LOGNORMALE.INVERSE}(\text{ALEA}(); a; b) / \text{EXP}((Ea/K) * (1/298 - 1/T)) \end{aligned}$$

¹ V. Bagdonavicius, L. Gerville-Réache, V. Nikoulina, M. Nikulin, Expériences accélérées : analyse statistique du modèle standard accéléré Revue de statistique appliquée, tome 48, n°3 (2000) page 5-38

3 – Ajustement par la méthode du maximum du vraisemblance

L'ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance consiste à maximiser le produit des densités de probabilité pour les valeurs de la variable ou la somme de leurs logarithmes.

3.1 Loi Weibull

Réalisé par l'outil GEN CAB, l'ajustement ci-dessous permet de retrouver les paramètres de la loi Weibull et la valeur de l'énergie d'activation utilisés pour simuler les données ; les écarts étant dus au nombre limité de ces dernières.

Jeu de données (Weibull + Arrhenius)

Simulation		Bêta :	2
473	298	Sigma :	500
Durée		Gamma :	0
Température		Ea :	0,7
619	298	k :	8,617E-05
199	298		
559	298		

Ajustement

Maximum de vraisemblance

Accélération : **ARRHENIUS**

Ea : 0,72159074

Loi de probabilité : **WEIBULL (2 paramètres)**

Bêta : 1,94571269

Sigma : 532,555826

LN Vraisemblance

-476,227426

Non censurées

LN K (non censurées)

-476,227426

Variable	Réf :	Covariables Température	Facteur d'accélération	AF * ti	Taux : $\lambda(ti)$	R(ti) = 1-F(ti)	Densité : f(ti)	Ln(f(ti))
618,839735		298	1	618,839735	0,00421101	0,26202257	0,00110338	-6,80937715
199,169816		298	1	199,169816	0,00144132	0,86282929	0,00124361	-6,68973455
558,550142		298	1	558,550142	0,00382197	0,33381736	0,00127584	-6,66415115
418,323181		298	1	418,323181	0,00290772	0,53517995	0,00155615	-6,46553829



Données Weibull



Ajustement Weibull

Ouverture des fichiers Excel par double clic de souris sur les icônes :

Une loi de Weibull à 3 paramètres ($\gamma \neq 0$) n'apparaît pas compatible avec le modèle Standard de Vie Accélérée car le facteur d'échelle σ s'applique à $t-\gamma$ et la facteur d'accélération A_F à t .

3.1 Loi Normale

Réalisé ci-après, l'ajustement permet à nouveau de retrouver les paramètres de la loi normale ainsi que la valeur de l'énergie d'activation.

Jeu de données (Normale + Arrhenius)

Simulation		m :	10
13	298	Sigma :	2
Durée		Ea :	0,7
Température		k :	8,617E-05
12,75	298		
11,25	298		
10,84	298		

Ajustement

Maximum de vraisemblance

Accélération : **ARRHENIUS**
Ea : **0,69077915**

Loi de probabilité : **NORMALE**
m : **10,0331725**
sigma : **1,84390415**

LN Vraisemblance
4,82126419

Non censurées

LN K (non censurées)
4,82126419

Variable	Réf :	Covariables		Facteur d'accélération	AF * ti	Taux : $\lambda(ti)$	R(ti) = 1-F(ti)	Densité : f(ti)	Ln(f(ti))
		Température							
12,7499909	298	298		1	12,7499909	1,03914748	0,07032091	0,0730738	-2,61628542
11,2530716	298	298		1	11,2530716	0,68405519	0,25411858	0,17383113	-1,74967096
10,8425566	298	298		1	10,8425566	0,59478487	0,33034845	0,19648626	-1,62716279

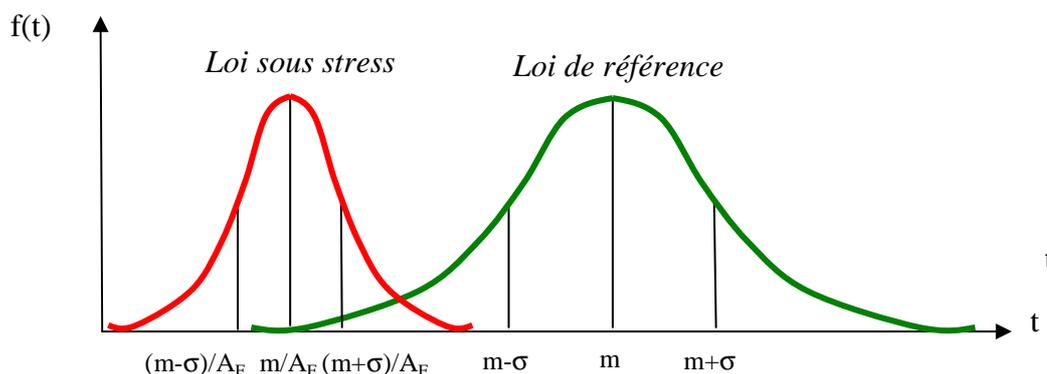


Données Normale



Ajustement Normale

Le stress a un effet sur les 2 paramètres de la loi normale. La loi normale de référence de paramètres m et σ se transforme en une loi normale de paramètre m/A_F et σ/A_F par l'effet du stress comme l'illustre la figure ci-après.



3.1 Loi Lognormale

Réalisé ci-après, l'ajustement ne permet pas de retrouver la valeur de l'énergie d'activation qui a tendance à augmenter et se bloquer à sa borne supérieure (1,2), contrairement aux paramètres de la loi lognormale que l'on peut retrouver si on fige l'énergie d'activation à sa valeur initiale (0,7).

Jeu de données (Lognormale + Arrhenius)

Simulation	
49699	298
Durée	
319585	298
500785	298
8581	298

a :	10
b :	2
Ea :	0,7
k :	8,617E-05

Ajustement

Maximum de vraisemblance

Accélération : **ARRHENIUS**

Ea : **1,2**

Loi de probabilité : **LOGNORMALE**

m : **11,864022**
sigma : **2,49659672**

LN Vraisemblance

128,971018

Non censurées

LN K (non censurées)

128,971018

Variable	Covariables		Facteur d'accélération	AF * ti	Taux : $\lambda(ti)$	R(ti) = 1-F(ti)	Densité : f(ti)	Ln(f(ti))
	Réf :	Température						
514154,429	298	298	1	514154,429	0,46151574	0,30320517	0,13993396	-1,96658468
6691,03029	298	298	1	6691,03029	0,08494995	0,88949847	0,07556285	-2,58279051
12732,3825	298	298	1	12732,3825	0,12028364	0,83301857	0,1001985	-2,30060201

Ajustement

Maximum de vraisemblance

Accélération : **ARRHENIUS**

Ea : **0,7**

Loi de probabilité : **LOGNORMALE**

m : **10,3595187**
sigma : **2,05554554**

LN Vraisemblance

-3,35070088

Non censurées

LN K (non censurées)

-3,35070088

Variable	Covariables		Facteur d'accélération	AF * ti	Taux : $\lambda(ti)$	R(ti) = 1-F(ti)	Densité : f(ti)	Ln(f(ti))
	Réf :	Température						
514154,429	298	298	1	514154,429	0,88468203	0,08728368	0,0772183	-2,56111881
6691,03029	298	298	1	6691,03029	0,18845113	0,77473818	0,14600029	-1,92414669
12732,3825	298	298	1	12732,3825	0,26253678	0,67059056	0,17605469	-1,73696061



Données Lognormale



Ajustement
Lognormale

Comme la loi de Weibull à 3 paramètres, la loi lognormale n'apparaît pas compatible avec le modèle Standard de Vie Accélérée.

En effet différents stress transforment cette loi en une somme de plusieurs lois normales en échelle logarithmique et donc en une loi qui n'est plus une lognormale.

