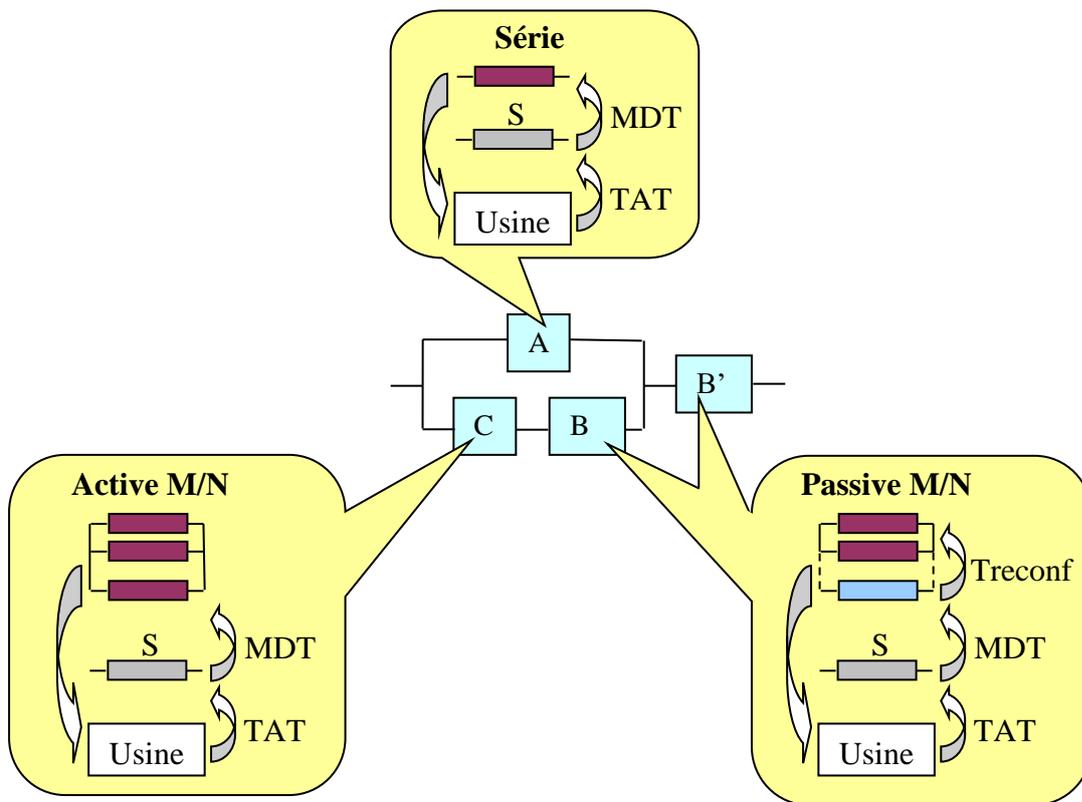


TP SdF N° 5

Système réparable avec rechanges éventuellement partagées

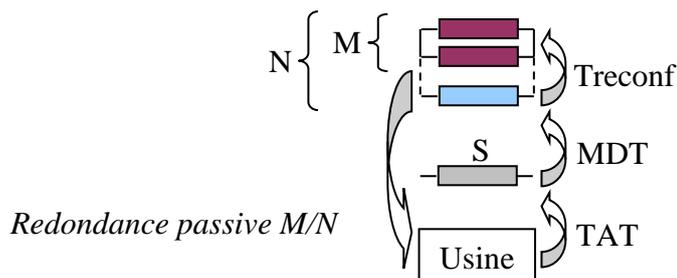
L'objet de ce TP est d'évaluer la disponibilité d'un système réparable comprenant des équipements de rechange éventuellement partagés. A partir d'un exemple représentatif d'architecture, comprenant des ensembles indépendants en redondance active ou passive de type M parmi N avec stock de rechange de dimension S, des durées de reconfiguration (Treconf), des durées de réparation par échange standard (MDT) et des délais de réapprovisionnement du stock ou de réparation en usine (TAT), il propose une approche markovienne et une modélisation récursive traitée par simulation de Monte-Carlo.



	MTBF					(heures)		
	M	N	S	ON	OFF	Treconf	MDT	TAT
A	1	1	2	10000	100000	-	15	70
B	2	3	1*	2000	20000	10	20	500
B'	1	2	1*	2000	20000	10	20	500
C	1	3	2	3000	30000	-	30	650

* B et B' sont des équipements identiques dont les rechanges peuvent être éventuellement partagées

1 - Approche markovienne



Le modèle markovien suivant d'une redondance passive 1 parmi 2 avec 1 équipement de rechange a été établi en identifiant les différents états possibles et en regroupant les états équivalents :

MAT :	1	2	3	4	5	6	7	8
Ok : 1	-	λ_{ON}	λ_{OFF}		λ_{OFF}			
Reconfiguration : 2		-	$1/Treconf$	λ_{ON}		λ_{OFF}		
Perte redondance : 3			-	λ_{ON}	$1/MDT$		λ_{OFF}	
Indisponible : 4				-			$1/MDT$	λ_{OFF}
Ok - 1 rechange : 5	$1/TAT$				-	λ_{ON}	λ_{OFF}	
Reconfiguration - 1 rechange : 6		$1/TAT$					$1/Treconf$	λ_{ON}
Perte redondance - 1 rechange : 7			$1/TAT$				-	λ_{ON}
Indisponible - 1 rechange : 8				$1/(TAT+MDT)$				-

INIT :	1	0	0	0	0	0	0	0
---------------	---	---	---	---	---	---	---	---

ETATS :	1	0	1	0	1	0	1	0
----------------	---	---	---	---	---	---	---	---

Il peut se généraliser en un modèle de redondance passive M parmi N avec stock de rechange de dimension S qui correspond à celui qui est automatiquement généré par l'une des formules paramétriques de disponibilité proposées par l'outil SUPERCAB (voir annexe).

On peut noter que dans ce modèle les pannes des équipements ne sont considérées que quand le système est disponible (ou lors des reconfigurations), hormis celles des équipements de rechange.

L'utilisation de cette formule de redondance permet d'obtenir directement les résultats de l'exemple à traiter :

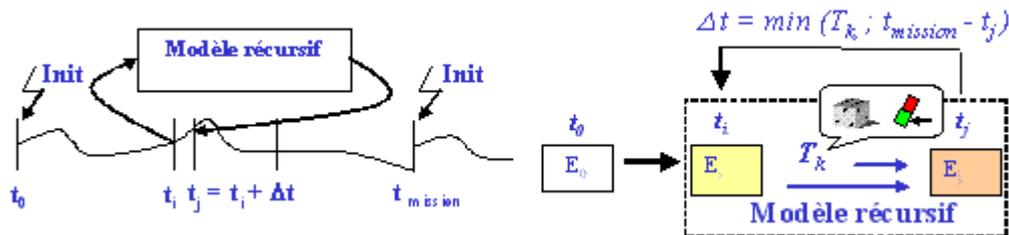
	MTBF (heures)								
	M	N	S	ON	OFF	Treconf	MDT	TAT	Disponibilité
A	1	1	2	10000	100000	-	15	70	0,99850177
B	2	3	1	2000	20000	10	20	500	0,91104693
B'	1	2	1	2000	20000	10	20	500	0,97875901
C	1	3	2	3000	30000	-	30	650	0,9884445
Système complet (A+C*B)*B'									0,978613126

L'optimisation des lots de rechange selon un critère de coût, satisfaisant une contrainte de tenue d'un objectif de disponibilité (disponibilité $\geq 0,99$), peut alors être réalisée simplement comme l'illustre la table suivante (couplage avec l'outil GEN CAB).

		MTBF (heures)										
		M	N	S	ON	OFF	Treconf	MDT	TAT	Disponibilité	Coût unitaire	Coût des rechanges
A	1	1	0	10000	100000	-	15	70	0,99304866	1000	0	
B	2	3	1	2000	20000	10	20	500	0,91104693	2000	2000	
B'	1	2	3	2000	20000	10	20	500	0,99327934	9000	27000	
C	1	3	1	3000	30000	-	30	650	0,98039992	5000	5000	
Système complet (A+C*B)*B'									0,99254186		34000	
									$\geq 0,99$			

La modélisation markovienne présente l'avantage de conduire à des traitements précis et rapides, propices à l'optimisation, mais elle ne permet pas de résoudre des problématiques plus complexes telles que celles relatives à des stocks de rechanges partagés, en raison de l'explosion combinatoire. Elle est alors abandonnée au profit de la simulation de Monte-Carlo.

2 - Modélisation récursive

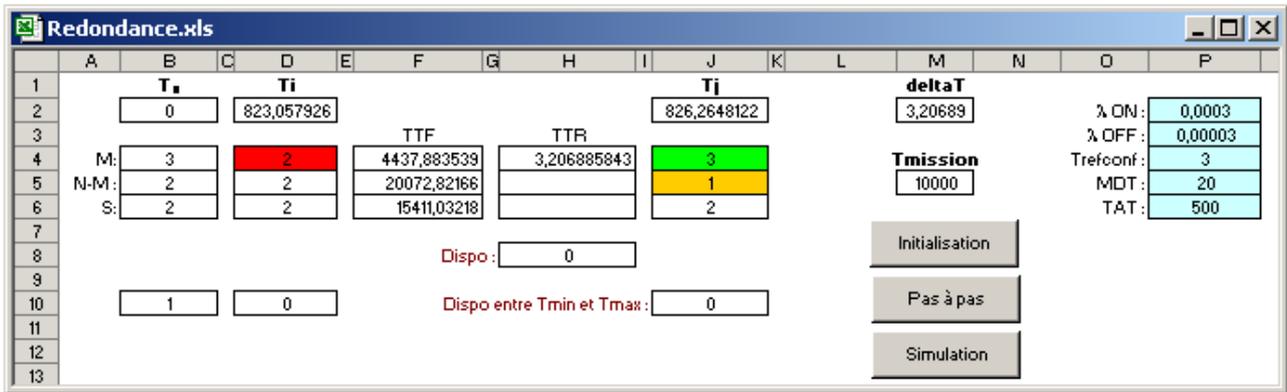


Mise en oeuvre par l'outil SIMCAB, la modélisation récursive consiste à décrire une transition générique entre deux instants courants t et $t + \Delta t$ correspondant à l'occurrence de changements aléatoires d'état du système (défaillance, remise en service...) ou au franchissement de certains seuils par des variables continues (alarme...). Ce modèle est défini par l'utilisateur au moyen des fonctions du tableur et de fonctions additionnelles de tirage aléatoire de diverses lois de probabilité (une vingtaine proposées par l'outil).

En partant d'un état initial E_0 , l'outil recopie l'état E_j de sortie du modèle (défini dans une plage de cellules) dans l'état E_i en entrée du modèle (dans une plage similaire), pendant toute la durée de la mission, en prenant comme incrément de temps ($\Delta t = T_k$) la plus petite valeur calculée dans une autre plage de cellules.

3 Modélisation récursive de la redondance

Le modèle de redondance M parmi N avec stock de rechange de dimension S se présente sous la forme de 3 cellules du tableur correspondant au nombre d'éléments actifs (M), passifs ($N-M$) et en stock (S), à T_0 , T_i et T_j , comme le montre la figure suivante.



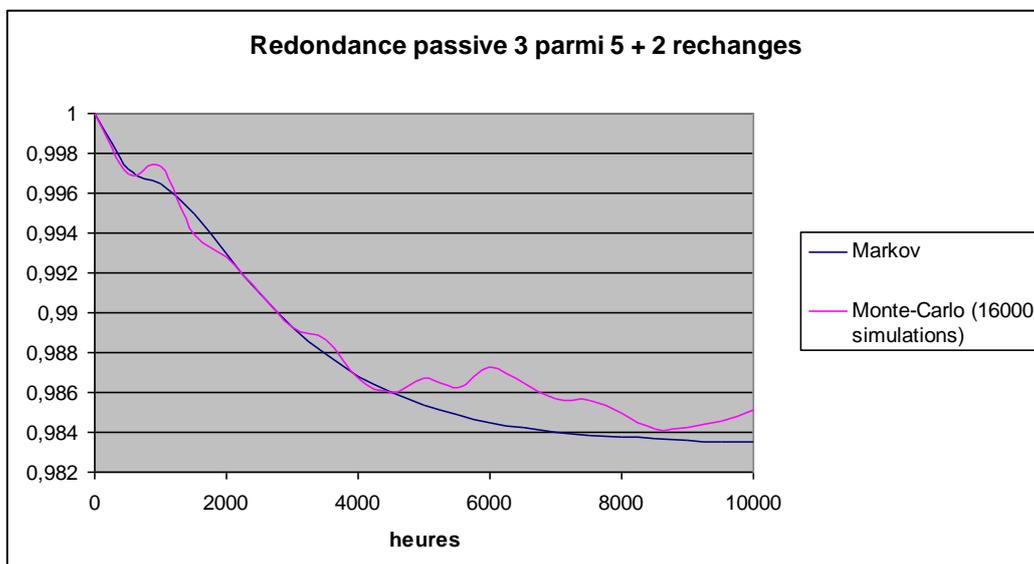
Les durées avant défaillance (TTF) ou de remise en état (TTR) sont définies par des expressions dans lesquelles la fonction L_Exp() exécute un tirage aléatoire de la loi exponentielle.

Afin d'être compatible avec le modèle markovien, les pannes des équipements opérationnels ne sont considérées que quand le système est disponible. De même un opérateur unique et un réparateur unique sont ici considérés (la parallélisation des opérations et réparations est cependant paramétrable dans la formule de redondance).

Les reconfigurations et échanges standard ne sont autorisés que si des équipements en redondance ou en rechange sont présents.

Le système est disponible tant que le nombre initial d'éléments actifs est maintenu, et la disponibilité moyenne est calculée sur toute la durée de la mission.

Les résultats de disponibilité issus du modèle de simulation et du modèle markovien sont cohérents tant en régime transitoire qu'asymptotique :



Disponibilité moyenne entre 8000 et 10000 heures

Moyenne	σ	Min	Max
0,98441545	0,07509097	0,98343899	0,98539192

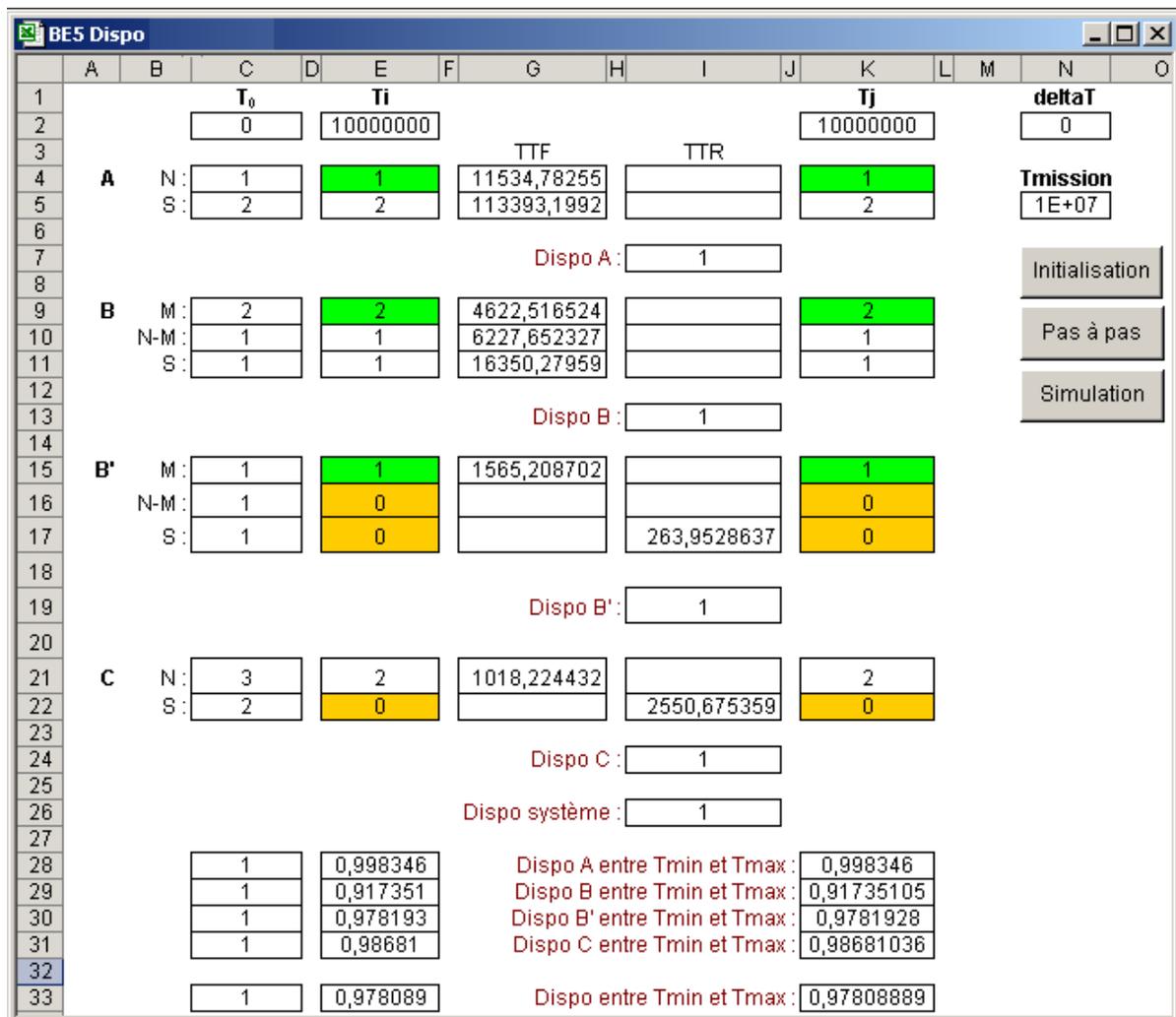
Taux de confiance : 90%

Disponibilité asymptotique

Markov :	0,98339024
Simulation (disponibilité moyenne sur 100 000 000 heures) :	0,98355176

4 Modélisation récursive du cas d'application

Un modèle récursif du cas d'application est présenté ci-après. Les résultats de simulation d'une mission de 10 000 000 heures sont voisins de ceux obtenu précédemment par traitement markoviens :



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1			T_0		T_i					T_j					deltaT
2			0		10000000					10000000					0
3							TTF		TTR						
4	A	N:	1		1		11534,78255				1				Tmission
5		S:	2		2		113393,1992				2				1E+07
6															
7							Dispo A :				1				
8															Initialisation
9	B	M:	2		2		4622,516524				2				
10		N-M:	1		1		6227,652327				1				
11		S:	1		1		16350,27959				1				
12															Simulation
13							Dispo B :				1				
14															
15	B'	M:	1		1		1565,208702				1				
16		N-M:	1		0						0				
17		S:	1		0				263,9528637		0				
18															
19							Dispo B' :				1				
20															
21	C	N:	3		2		1018,224432				2				
22		S:	2		0				2550,675359		0				
23															
24							Dispo C :				1				
25															
26							Dispo système :				1				
27															
28			1		0,998346		Dispo A entre Tmin et Tmax :				0,998346				
29			1		0,917351		Dispo B entre Tmin et Tmax :				0,91735105				
30			1		0,978193		Dispo B' entre Tmin et Tmax :				0,9781928				
31			1		0,98681		Dispo C entre Tmin et Tmax :				0,98681036				
32															
33			1		0,978089		Dispo entre Tmin et Tmax :				0,97808889				

Taitements Markoviens :

Dispo A	0,99850177
Dispo B	0,91104693
Dispo B'	0,97875901
Dispo C	0,9884445
Dispo système	0,978613126

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
8											
9	B	M:	=M_B	2	=SI(ET(E3>0;E9-E10>=C9);L_Exp(E9*WMTBF_ON_B);"")		=SI(ET(E3<C9;E10>0);L_Exp(1/Treconf_B);"")				=SI(deltaT=B9;E9<1;SI(deltaT=19;E9<E9))
10		N-M:	=N_B-M_B	1	=SI(ET(E10>0;E9-E10>=C9);L_Exp(E10*WMTBF_OFF_B);"")		=SI(ET(E10<C10;E17>0);L_Exp(1/MDT_B);"")				=SI(OU(deltaT=G10;deltaT=19);E10<1;SI(deltaT=110;E10<1;E10))
11											
12											
13											
14	B'	M:	=M_Bp	1	=SI(ET(E14>0;E14-E15>=C14);L_Exp(E14*WMTBF_ON_Bp);"")		=SI(ET(E14<C14;E15>0);L_Exp(1/Treconf_Bp);"")				=SI(deltaT=B14;E14<1;SI(deltaT=114;E14<E14))
15		N-M:	=N_Bp-M_Bp	1	=SI(ET(E15>0;E14-E15>=C14);L_Exp(E15*WMTBF_OFF_Bp);"")		=SI(ET(E15<C15;E17>0);L_Exp(1/MDT_Bp);"")				=SI(OU(deltaT=G15;deltaT=114);E15<1;SI(deltaT=115;E15<1;E15))
16											
17		S:	=S_B+S_Bp	2	=SI(E17>0;L_Exp(E17*WMTBF_OFF_B);"")		=SI(E17<C17;L_Exp((C17-E17)/TAT_B);"")				=SI(OU(deltaT=G17;deltaT=110;deltaT=115);E17<1;SI(deltaT=117;E17<1;E17))
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											
32											
33											
34											
35											
36											
37											
38											
39											
40											
41											
42											
43											
44											
45											
46											
47											
48											
49											
50											

Cette méthode de modélisation récursive peut être employée pour traiter des architectures complexes constituées de sous ensembles interdépendants (redondance froide entre chaînes, opérateurs ou réparateurs multi-tâches en nombre limité, lots de rechange partagés, etc.).

La durée de la simulation dépend essentiellement du nombre moyen d'événements survenant au cours de la mission et non pas de la complexité.

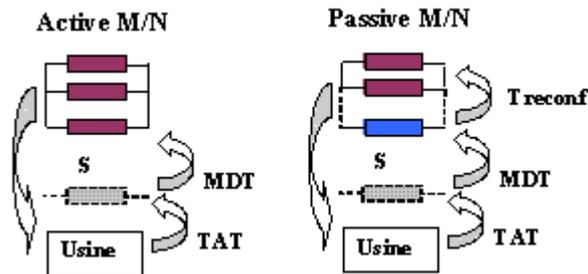
Aussi, même si elle s'avère sensiblement moins performante en temps de calcul que des traitements markoviens équivalents, elle peut conduire à des optimisations (l'outil GEN CAB propose un couplage particulièrement efficace entre optimisation et simulation de Monte-Carlo réduisant la durée globale des traitements dans un rapport 10 environ).

Annexe

Formule de redondance avec stock de rechange proposée par l'outil SUPERCAB

La formule paramétrique suivante est proposée pour traiter les redondances actives ou passives de type M parmi N avec stock de rechange de dimension S.

Redondance(M;N;λON;λOFF;T;Treconf;MDT;Nb_opérateurs;S;TAT;Nb_réparateurs;Active/passive; Fiab/Dispo)



A partir des arguments suivants, elle permet d'évaluer la fiabilité ou la disponibilité d'une telle redondance en considérant la durée de reconfiguration (Treconf), la durée de réparation par échange standard (MDT) et le délai de réapprovisionnement du stock ou de réparation en usine (TAT).

T, Treconf, MDT, TAT, 1/λ, 1/λOFF

- Même unité de temps

λOFF

- 0 par défaut

Nb_opérateurs

- 1 : 1 opérateur réalise les échanges standard (en série)
- 2 : N opérateurs réalisent les échanges standard (en parallèle)

Nb_réparateurs

- 1 : 1 réparateur réalise les réparations en usine (en série)
- 2 : N réparateurs réalisent les réparations en usine (en parallèle)

Active/passive

- 1 : Active
- 2 : Passive

Fiab_Dispo

- 1 : Perte définitive du système si moins de M éléments actifs
- 2 ou 3 : Indisponibilité temporaire si moins de M éléments actifs
- 3 : Perte définitive du système si moins de M éléments actifs et absence de rechange

Les modèles markoviens utilisés par cette formule sont fournis dans les pages suivantes.

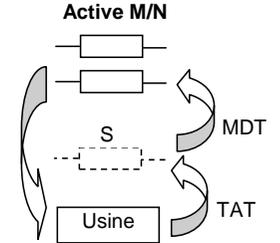
Redondance active

	1	2	3	-	N-M	N-M+1	N-M+2	N-M+3	N-M+4	N-M+5	-	(N-M+2)*2-1	(N-M+2)*2	(N-M+2)*3	(N-M+2)*4	-	(N-M+2)*(S+1)-1	(N-M+2)*(S+1)	
OK	1	-	$N*\lambda_{ON}$					$S*\lambda_{OFF}$											
Perte 1 élément	2		$(N-1)*\lambda_{ON}$					$1/MDT$	$S*\lambda_{OFF}$										
Perte 2 éléments	3		-					$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$										
-	-																		
Perte N-M-1 éléments	N-M				-	$(M+1)*\lambda_{ON}$						$S*\lambda_{OFF}$							
Perte N-M éléments	N-M+1					-	$M*\lambda_{ON} (2)$					$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$						$M*\lambda_{ON} (1)$
Indisponible	N-M+2						-					$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$						
-1 rechange	N-M+3	$1/TAT$						-	$N*\lambda_{ON}$					$(S-1)*\lambda_{OFF}$					
Perte 1 élément	N-M+4		$1/TAT$						-	$(N-1)*\lambda_{ON}$				$1/MDT$	$(S-1)*\lambda_{OFF}$				
Perte 2 éléments	N-M+5			$1/TAT$						-				$1/MDT (4)$					
-	-																		
Perte N-M-1 éléments	(N-M+2)*2-2				$1/TAT$							-	$(M+1)*\lambda_{ON}$						
Perte N-M éléments	(N-M+2)*2-1					$1/TAT$							-	$M*\lambda_{ON} (2)$					$M*\lambda_{ON} (1)$
Indisponible	(N-M+2)*2						$1/TAT$							-					
-1 rechange	(N-M+2)*3							$1/TAT (5)$							-	$N*\lambda_{ON}$			
Perte 1 élément	(N-M+2)*4								$1/TAT (5)$							-			
-	-																		
Perte N-M-1 éléments	(N-M+2)*(S+1)-2																		$(M+1)*\lambda_{ON}$
Perte N-M éléments	(N-M+2)*(S+1)-1																		-
Perte Système	(N-M+2)*(S+1)																		$1/(TAT+MDT) (3)$

M : 2
 N : 4
 S : 2
 (N-M+2)*(S+1) : 12

- (1) Fiab_Dispo = 1 : Perte définitive du système si moins de M éléments actifs
- (2) Fiab_Dispo = 2 ou 3 : Indisponibilité temporaire si moins de M éléments actifs
- (3) Fiab_Dispo = 2 : Indisponibilité de durée MDT+TAT/i si i réparateurs
 Fiab_Dispo = 1 ou 3 : Etat absorbant
- (4) i/MDT si i opérateurs, avec i inférieur ou égal au nombre de rechanges disponibles
- (5) j/TAT si j réparateurs

Redondance(M;N;λ_{ON};λ_{OFF};T;Treconf;MDT;Nb_opérateurs;S;TAT;Nb_réparateurs;Active/passive;Fiab/Dispo)

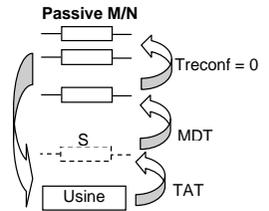


Redondance passive - Treconf = 0

	1	2	3	-	N-M	N-M+1	N-M+2	N-M+3	N-M+4	N-M+5	-	(N-M+2)*2-2	(N-M+2)*2-1	(N-M+2)*2	(N-M+2)*3	(N-M+2)*4	-	(N-M+2)*(S+1)-1	(N-M+2)*(S+1)	
OK	1	-	$M*\lambda_{ON}+(N-M)*\lambda_{OFF}$					$S*\lambda_{OFF}$												
Perte 1 élément	2		-					$1/MDT$	$S*\lambda_{OFF}$											
Perte 2 éléments	3								$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$										
-																				
Perte N-M-1 éléments	N-M				-	$M*\lambda_{ON}+\lambda_{OFF}$								$S*\lambda_{OFF}$						
Perte N-M éléments	N-M+1					-	$M*\lambda_{ON} (2)$						$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$						$M*\lambda_{ON} (1)$
Indisponible	N-M+2						-						$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$						
-1 rechange	N-M+3	$1/TAT$						-	$M*\lambda_{ON}+(N-M)*\lambda_{OFF}$							$(S-1)*\lambda_{OFF}$				
Perte 1 élément	N-M+4		$1/TAT$						-	$M*\lambda_{ON}+(N-M-1)*\lambda_{OFF}$						$1/MDT$				$(S-1)*\lambda_{OFF}$
Perte 2 éléments	N-M+5			$1/TAT$						-						$1/MDT (4)$				
-																				
Perte N-M-1 éléments	(N-M+2)*2-2				$1/TAT$							-	$M*\lambda_{ON}+\lambda_{OFF}$							
Perte N-M éléments	(N-M+2)*2-1					$1/TAT$							-	$M*\lambda_{ON} (2)$						$M*\lambda_{ON} (1)$
Indisponible	(N-M+2)*2						$1/TAT$													
-2 rechanges	(N-M+2)*3							$1/TAT (5)$												
Perte 1 élément	(N-M+2)*4								$1/TAT (5)$											
-																				
Perte N-M-1 éléments	(N-M+2)*(S+1)-2																			-
Perte N-M éléments	(N-M+2)*(S+1)-1																			
Perte Système	(N-M+2)*(S+1)																			$1/(TAT+MDT) (3)$

M : 2
 N : 4
 S : 2
 (N-M+2)*(S+1) : 12

- (1) Fiab_Dispo = 1 : Perte définitive du système si moins de M éléments actifs
- (2) Fiab_Dispo = 2 ou 3 : Indisponibilité temporaire si moins de M éléments actifs
- (3) Fiab_Dispo = 2 : Indisponibilité de durée MDT+TAT/i si i réparateurs
 Fiab_Dispo = 1 ou 3 : Etat absorbant
- (4) i/MDT si i opérateurs, avec i inférieur ou égal au nombre de rechanges disponibles
- (5) j/TAT si j réparateurs



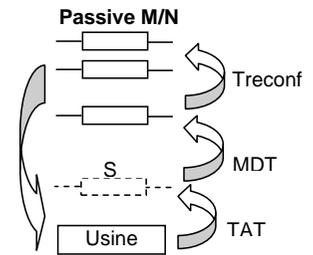
Redondance(M;N;λ_{ON};λ_{OFF};T;Treconf;MDT;Nb_opérateurs;S;TAT;Nb_réparateurs;Active/passive;Fiab/Dispo)

Redondance passive - Treconf <= 0

	1	2	3	4	5	-	2*(N-M)-1	2*(N-M)	2*(N-M)+1	2*(N-M)+2	2*(N-M)+3	2*(N-M)+4	2*(N-M)+5	2*(N-M)+6
OK	1	-	$M*\lambda_{ON}$	$(N-M)*\lambda_{OFF}$							$S*\lambda_{OFF}$			
Reconfiguration	2	-	1/Treconf	$M*\lambda_{ON}+(N-M-1)*\lambda_{OFF}$								$S*\lambda_{OFF}$		
Perte 1 élément	3		-	$M*\lambda_{ON}$	$(N-M-1)*\lambda_{OFF}$						1/MDT		$S*\lambda_{OFF}$	
Reconfiguration	4			-	1/Treconf									$S*\lambda_{OFF}$
Perte 2 éléments	5				-								1/MDT (4)	
-														
Reconfiguration	2*(N-M)-2					-	1/Treconf	$M*\lambda_{ON}+\lambda_{OFF}$						
Perte N-M-1 éléments	2*(N-M)-1						-	$M*\lambda_{ON}$	λ_{OFF}					
Reconfiguration	2*(N-M)							-	1/Treconf	$M*\lambda_{ON} (2)$				
Perte N-M éléments	2*(N-M)+1								-	$M*\lambda_{ON} (2)$				
Indisponible	2*(N-M)+2									-				
-1 rechange	2*(N-M)+3	1/TAT										-	$M*\lambda_{ON}$	$(N-M)*\lambda_{OFF}$
Reconfiguration	2*(N-M)+4		1/TAT										-	1/Treconf
Perte 1 élément -1 rechange	2*(N-M)+5			1/TAT										-
Reconfiguration	2*(N-M)+6				1/TAT									
Perte 2 éléments -1 rechange	2*(N-M)+7					1/TAT								
-														
Reconfiguration	(2*(N-M)+2)*2-4													
Perte N-M-1 éléments -1 rechange	(2*(N-M)+2)*2-3						1/TAT							
Reconfiguration	(2*(N-M)+2)*2-2							1/TAT						
Perte N-M éléments -1 rechange	(2*(N-M)+2)*2-1								1/TAT					
Indisponible -1 rechange	(2*(N-M)+2)*2									1/TAT				
-2 rechanges	(2*(N-M)+2)*2+1										1/TAT (5)			
Reconfiguration	(2*(N-M)+2)*2+2											1/TAT (5)		
Perte 1 élément -2 rechanges	(2*(N-M)+2)*2+3												1/TAT (5)	
-														
Reconfiguration	(2*(N-M)+2)*(S+1)-4													
Perte N-M-1 éléments -S rechanges	(2*(N-M)+2)*(S+1)-3													
Reconfiguration	(2*(N-M)+2)*(S+1)-2													
Perte N-M éléments -S rechanges	(2*(N-M)+2)*(S+1)-1													
Perte Système	(2*(N-M)+2)*(S+1)													

M : 2
 N : 4
 S : 2
 (2*(N-M)+2)*(S+1) : 18

- (1) Fiab_Dispo = 1 : Perte définitive du système si moins de M éléments actifs
- (2) Fiab_Dispo = 2 ou 3 : Indisponibilité temporaire si moins de M éléments actifs
- (3) Fiab_Dispo = 2 : Indisponibilité de durée MDT+TAT/i si i réparateurs
 Fiab_Dispo = 1 ou 3 : Etat absorbant
- (4) i/MDT si i opérateurs, avec i inférieur ou égal au nombre de rechanges disponibles
- (5) j/TAT si j réparateurs



Redondance(M;N;λ_{ON};λ_{OFF};T;Treconf;MDT;Nb_opérateurs;S;TAT;Nb_réparateurs;Active/passive;Fiab/Dispo)

$2^*(N-M)+7$	-	$(2^*(N-M)+2)*2-3$	$(2^*(N-M)+2)*2-2$	$(2^*(N-M)+2)*2-1$	$(2^*(N-M)+2)*2$	$(2^*(N-M)+2)*2+1$	$(2^*(N-M)+2)*2+2$	$(2^*(N-M)+2)*2+3$	-	$(2^*(N-M)+2)*(S+1)-3$	$(2^*(N-M)+2)*(S+1)-2$	$(2^*(N-M)+2)*(S+1)-1$	$(2^*(N-M)+2)*(S+1)$
$S*\lambda_{OFF}$													
		$S*\lambda_{OFF}$											
		$1/MDT (4)$	$S*\lambda_{OFF}$										$M*\lambda_{ON} (1)$
			$1/MDT (4)$										$M*\lambda_{ON} (1)$
						$(S-1)*\lambda_{OFF}$							
						$(S-1)*\lambda_{OFF}$							
$(N-M-1)*\lambda_{OFF}$						$1/MDT$				$(S-1)*\lambda_{OFF}$			
$1/Treconf$													
-										$1/MDT (4)$			
	-	$1/Treconf$	$M*\lambda_{ON}+\lambda_{OFF}$										
		-	$M*\lambda_{ON}$	λ_{OFF}									
			-	$1/Treconf$	$M*\lambda_{ON} (2)$								$M*\lambda_{ON} (1)$
				-	$M*\lambda_{ON} (2)$								$M*\lambda_{ON} (1)$
					-								
						-	$M*\lambda_{ON}$	$(N-M)*\lambda_{OFF}$					
							-	$1/Treconf$					
								-					
									-	$1/Treconf$	$M*\lambda_{ON}+\lambda_{OFF}$		
										-	$M*\lambda_{ON}$	λ_{OFF}	
											-	$1/Treconf$	$M*\lambda_{ON}$
												-	$M*\lambda_{ON}$
													-
													$1/(TAT+MDT) (3)$