TP N° 54

Estimation d'un intervalle de confiance[1]

L'objet de ce TP est d'estimer un intervalle de confiance lors de la résolution de diverses problématiques rencontrées par le fiabiliste.

-----

1) Estimer la durée de réparation d'un matériel à 60 % de confiance à partir de 10 observations, en supposant que la durée de réparation est distribuée selon une loi normale.

2) Un fusible mécanique a pour fonction de rompre lorsque qu'une force comprise entre 150 et 170 newtons lui est appliquée. La conformité de chaque lot de production, que l'on suppose suivre une loi gaussienne, est testée par échantillonnage en utilisant la règle des 3 sigmas afin de garantir un taux de composants défectueux inférieur à 3 /1000. Associer à ce taux de défaillance une confiance à 60 %.

3) Estimer la probabilité d'erreur de pixel à partir de l'analyse de 10 images de 1000 pixels chacune.

4) Donner un intervalle de confiance sur la moyenne des résultats d'une simulation de Monte-Carlo.

5) Estimer la disponibilité d'un système à partir de résultats de simulation de Monte-Carlo.

6) Estimer les paramètres d'une loi de Weibull à 60 % de confiance à partir d'observations de durée de fonctionnement.

7) Estimer le MTBF à 60% d'un composant électronique à l'issue d'un essai de fiabilité de 50 pièces pendant 1 000 heures durant lequel 2 pièces sont tombées en panne à 5 450 et 7 800 heures.

8) Estimer le taux de défaut à 60% de confiance d'un lot de composants sachant que 3 composants d'un échantillon de 100 pièces de ce même lot se sont révélés défectueux.

9) Trouver des majorants du quantile d'ordre 90% à partir d'un échantillon de 20 valeurs.

10) Déterminer le nombre minimum de simulations nécessaires à l'obtention d'un majorant de la valeur du quantile 95 à 95 % de confiance.

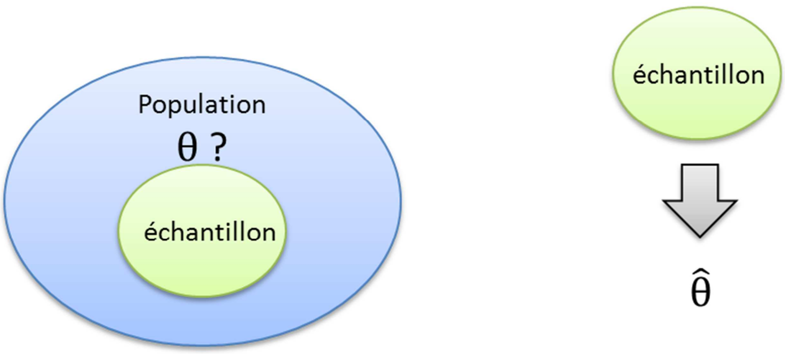
[1] Ce TP a été élaboré en collaboration avec Marion Soussens, étudiante en master MSID (Méthodes Stochastiques et Informatiques pour la Décision) à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour.

1) Intervalle de confiance

L’estimation est à la base de la notion d’intervalle de confiance. C’est pourquoi il est important de rappeler en premier lieu les principales caractéristiques des estimateurs.

Un estimateur sert à estimer un paramètre caractéristique d’une population à partir d’un échantillon. C’est une variable aléatoire qui est fonction de l’échantillon et ne dépend pas d’autres paramètres.

Sa valeur observée, l’estimation, est la valeur calculée sur un échantillon particulier et que l’on espère être une bonne évaluation de la valeur qu’on aurait calculé sur la population totale. Il est donc important que l’échantillon soit le plus représentatif possible de la population.



L’estimation obtenue est ponctuelle et n’est qu’une valeur possible pour ce paramètre, sans aucune évaluation de l’erreur d’estimation commise.

Par ailleurs, l’estimateur a ses caractéristiques propres. Il peut être :

- Convergent, si l’estimation tend vers θ quand la taille de l’échantillon tend vers l’infini
- Sans biais, si à partir de différents échantillons l’espérance des estimations est θ
- Efficace, si la variance des estimations est faible

L’intérêt d’un intervalle de confiance est d’obtenir, à partir d’un échantillon observé $(x_1,x_2\ldots x_n)$, un **intervalle de valeurs possibles** pour le paramètre inconnu de la population avec une certaine probabilité (niveau de confiance) que sa valeur réelle se trouve bien dans cet intervalle.

On appelle **intervalle de confiance pour Θ de niveau de confiance β,** ou de niveau de **risque α**, tout intervalle C_X tel que :

$$P(\theta \in C_X) = \beta = 1- \alpha$$

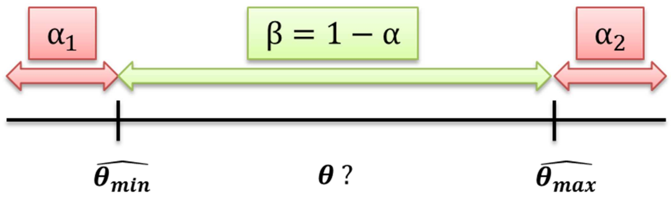
L’intervalle C_X ainsi défini est aléatoire : il dépend en effet de l’échantillon sur lequel on travaille et ses bornes varient d’un échantillon à un autre. Pour un échantillon observé donné, le paramètre Θ appartient ou n’appartient pas à C_X avec des probabilités respectives β et α.

Sur un grand nombre d’échantillons observés (et donc un grand nombre d’intervalles créés), θ appartient à C_X dans $(1- \alpha) \times 100\%$ des cas.

Selon que l’on cherche à encadrer un paramètre ou à estimer un majorant ou un minorant de celui-ci, l’intervalle sera bilatéral ou unilatéral. Toutefois, l’essentiel des problématiques d’estimation rencontrées par le fiabiliste concerne des intervalles unilatéraux (temps moyen de fonctionnement min, taux de défaillance max, durée de réparation min, etc.).

Intervalle bilatéral :

$$C_X = [\ \widehat{\theta_{min}}\ ;\ \widehat{\theta_{max}}\ ]$$

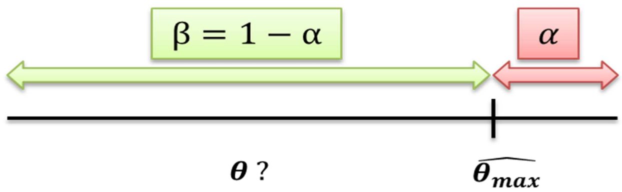


Avec $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$

L'intervalle bilatéral peut être symétrique : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$ ou dissymétrique : $\alpha_1 \neq \alpha$

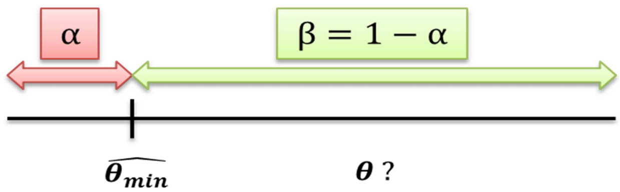
Intervalle unilatéral :

$$C_X =]-\infty\ ;\ \widehat{\theta_{max}}]$$



Borne supérieure

$$C_X = [\widehat{\theta_{min}}\ ;+\infty[$$



Borne inférieure

L'interface de confiance le plus connu encadre la moyenne dans le cas d'une population gaussienne. Il résulte directement du théorème central limite qui affirme que la moyenne d'un échantillon varie selon une loi normale :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Intervalle bilatéral : $\boxed{\mu \pm Z_{1-\alpha/2}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ Intervalle unilatéral : $\boxed{\mu \pm Z_{1-\alpha}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Avec μ : moyenne de l'échantillon

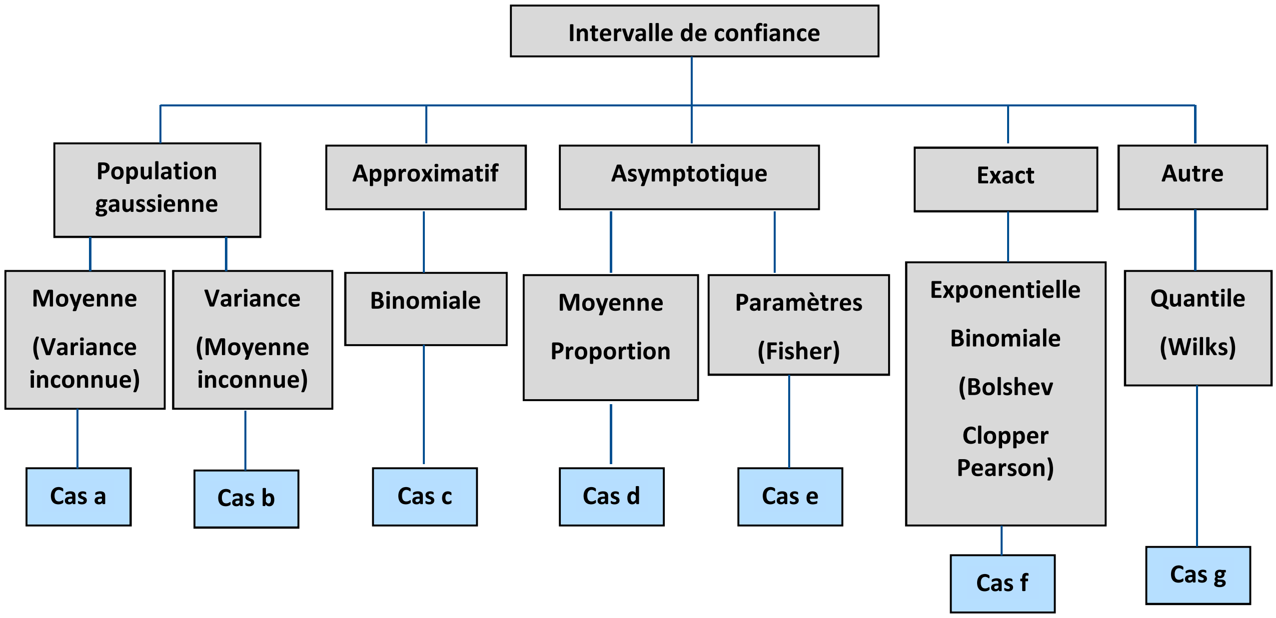
$Z_{1-\alpha/2}$: Quantile de la loi normale centrée réduite d'ordre $1-\alpha/2$

σ : Ecart type de la population

n : Taille de l'échantillon

Mais l'écart type de la population σ est dans les faits rarement connu.

Le schéma, ci-dessous, présente les différents types d'intervalle de confiance sous forme d'organigramme.



- **<u>Cas a : intervalle de confiance pour la moyenne dans le cas d'une population gaussienne de variance inconnue</u>**

Partant du théorème central limite $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, on estime la variance σ^2 de la population au moyen de l'estimateur : $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.
Cet estimateur est sans biais et peut être approché au moyen d'un loi du khi-2 : $S_n^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{(n-1)}$.

Ces deux résultats permettent d'affirmer que la variable aléatoire $\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)}{S_n}$ suit une loi de Student à (n-1) degrés de liberté (cf. définition de la loi de Student).

La loi de Student étant symétrique par rapport à l'origine, on obtient un intervalle de confiance bilatéral symétrique de la manière suivante :

$$P\left(-t_{(n-1),1-\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)}{S_n} \leq t_{(n-1),1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\overline{X_n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{(n-1),1-\alpha/2} \leq m \leq \overline{X_n} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{(n-1),1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left[\overline{X_n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{(n-1),1-\alpha/2}\ ;\ \overline{X_n} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{(n-1),1-\alpha/2}\right]$$

Avec $t_{(n-1),1-\alpha/2}$ le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.

Dans le cas unilatéral, les intervalles deviennent :

$$Borne\ inférieure : \left[\overline{X_n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{(n-1),1-\alpha}\right] \qquad Borne\ supérieure : \left[\overline{X_n} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\, t_{(n-1),1-\alpha}\right]$$

<u>Exemple 1</u> : durée de réparation d'un matériel à 60 % de confiance à partir de 10 observations

La distribution est ici caractérisée par une loi normale, bien qu'une loi lognormale soit généralement utilisée pour une durée de réparation.

Intervalle de confiance de la moyenne d'une population gaussienne de variance inconnue

Durées de réparation X_i			
	Bêta :	60%	
9,40	n :	10	
11,28	Moyenne échantillon :	10,4209759	$\overline{X}_n$
12,04	Ecart-type (débiaisé) :	1,69271847	S_n
8,01			
8,87		Bilatéral	
9,84	Durée moyenne min :	9,94810344	*9,94810344*
10,65	Durée moyenne max :	10,8938484	
8,96			
11,77		Unilatéral	
13,39	Durée moyenne min :	10,2812905	
	Durée moyenne max :	10,5606613	à 60% de confiance

Moyenne

Ouverture du fichier Excel par double clic sur l'icône :

- **<u>Cas b : intervalle de confiance pour la variance dans le cas d'une population gaussienne de moyenne inconnue</u>**

Un intervalle de confiance bilatéral symétrique peut être obtenu à partir de l'estimateur de la variance S_n^2.

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \frac{\sigma^2}{n-1}\chi^2_{(n-1)} \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$$

$$P\left(\chi_{(n-1),\alpha/2} \leq \frac{n-1}{\sigma^2}S_n^2 \leq \chi_{(n-1),1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\alpha/2}(n-1)} \; ; \; \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

Avec $\chi_{proba}\,(d)$ le quantile d'ordre $proba$ de la loi du Chi-Deux à d degré de liberté.

Dans le cas unilatéral, les intervalles deviennent :

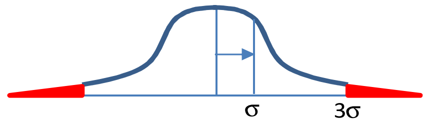
$$Borne\ inférieure : \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\alpha}(n-1)}\right] \qquad \text{Borne supérieure} : \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\alpha}(n-1)}\right]$$

Exemple 2 : **Intervalle de confiance à 3 σ à 60 % de confiance**

Intervalle de confiance de la variance d'une population gaussienne de moyenne inconnue

Force X_i
158,11
156,93
159,86
164,87
161,23
164,65
160,92
156,83
158,74
156,72

Bêta :	60%	
n :	10	
Moyenne échantillon :	159,89	$\overline{X}_n$
Ecart-type (débiaisé) :	3,036193922	S_n
	Bilatéral	
V min :	6,777101448	
V max :	15,42108573	
	Unilatéral	
Variance min :	8,813409155	
Variance max :	11,27713371	



Taux de composants défectueux: 0,27%

Intervalle à 3 sigma à 60% de confiance :	149,8120205	169,9608868
Intervalle à 3 sigma :	150,7778719	168,9950354
Limites de fonctionnement :	150	170

Variance

- **Cas c : intervalle de confiance approximatif**

L'intervalle de confiance est dit approximatif s'il se base sur l'approximation d'une loi par une autre.

C'est par exemple le cas d'une loi binomiale de paramètres (n, p) qui peut être approximée par une loi normale de moyenne m = np et de variance σ^2 = np(1-p), si n est assez grand et p pas trop proche de 0 ou de 1.

Exemple 3 : **Intervalle de confiance sur la probabilité d'erreur de pixel à partir de 10 images**

Intervalle de confiance approximatif (loi binomiale)

Nb pixels affectés
10
12
23
2
18
25
13
8
9
7

Nb pixels par image :	1000	
Bêta :	60%	
N :	10	
Moyenne échantillon :	12,7	$\overline{X}_n$
Ecart-type (débiaisé) :	7,27323862	S_n
	Unilatéral	
Moyenne à 60% :	13,3001973	
Proba d'erreur de pixel à 60% :	0,0133002	

Approximatif

- **<u>Cas d : Intervalle de confiance asymptotique pour la moyenne dans le cas d'une population non gaussienne</u>**

Le Théorème Central Limite n'est alors valide que pour un échantillon de grande taille (n>30).

En utilisant l'estimateur non biaisé de la variance $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \rightarrow \sigma^2$, on obtient l'intervalle de confiance bilatéral symétrique suivant pour la moyenne :

$$P\left(\bar{X} - \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq m \leq \bar{X} + \frac{S_n}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1-\alpha$$

$$IC_{1-\alpha}(m) = \left[\overline{X_n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ z_{1-\alpha/2};\ \overline{X_n} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ z_{1-\alpha/2}\right]$$

Dans le cas unilatéral, les intervalles deviennent :

$$\text{Borne inférieure : }\left[\overline{X_n} - \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ z_{1-\alpha}\right] \qquad \textit{Borne supérieure : }\left[\overline{X_n} + \frac{S_n}{\sqrt{n}}\ z_{1-\alpha}\right]$$

<u>Exemple 4</u> : intervalle de confiance sur la moyenne des résultats d'une simulation de Monte-Carlo.

Intervalle de confiance asymptotique de la moyenne d'une population quelconque

Résultat X_i
2,24
8,06
8,52
1,88
8,57
2,67
5,01
8,41
0,49
5,50
8,05
8,08
6,45
2,72
2,65

Bêta :	60%	
n :	40	
Moyenne échantillon :	4,99352958	$\overline{X_n}$
Ecart-type (débiaisé) :	2,56830185	S_n
	Bilatéral	
Moyenne min :	4,65176051	
Moyenne max :	5,33529865	
	Unilatéral	
Moyenne min :	4,89064933	
Moyenne max :	5,09640983	

Moyenne asymptotique

Dans le cas d'une proportion, une loi de Bernouilli de paramètres (p) peut être approchée par une loi normale de moyenne m = p et de variance σ^2 = p(1-p). Par ailleurs, une proportion étant une moyenne entre des valeurs 0 et 1, un intervalle de confiance asymptotique peut être défini pour p.

<u>Exemple 5</u> : intervalle de confiance sur la disponibilité d'un système à partir de résultats de simulation de Monte-Carlo.

Intervalle de confiance d'une proportion

0
1
1
1
1
1
0

Bêta :	60%
N :	38
Proportion échantillon :	0,52631579

Unilatéral minorant

Disponibilité à 60% : 0,50551965

$$D \geq P - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n-1}}$$

Proportion

- **<u>Cas e : Intervalle de confiance asymptotique pour les paramètres d'une loi quelconque : méthode de Fisher</u>**

A l'issue d'un ajustement par la méthode du maximum de vraisemblance, des intervalles de confiance asymptotiques peuvent être calculés à partir de l'information de Fisher :

$$I_n(\theta) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta^2}\right) \qquad F = I_n(\theta) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_1^{\,2}} & -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_1\,\partial\theta_2} & -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_1\,\partial\theta_3} \\ -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_2\,\partial\theta_1} & -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_2^{\,2}} & -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_2\,\partial\theta_3} \\ -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_3\,\partial\theta_1} & -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_3\,\partial\theta_2} & -\dfrac{\partial^2 Ln\,L(X,\theta)}{\partial\theta_3^{\,2}} \end{pmatrix}$$

L'inverse de la matrice de Fisher est la matrice de variance-covariance

Pour chacun des paramètres de la loi, des intervalles de confiance peuvent alors être calculés à partir de leur variance (éléments diagonaux de la matrice) en considérant des lois normales.

De même un intervalle de confiance peut être calculé pour une fonction des différents paramètres (quantile 90 par exemple) en considérant que la variance de cette fonction est égale à :

$$\sigma^2_{\hat{g}_n}(\theta) = \nabla g(\theta)^T\; I_n^{-1}(\theta)\; \nabla g(\theta)$$

Avec $\nabla g(\theta) \quad et \quad \nabla g(\theta)^T = \left(\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta_1}; \quad \dots \quad ; \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta_m}\right)$ le gradient et le transposée de g et $I_n^{-1}(\theta)$ l'inverse de la matrice de Fisher.

Exemple 6 : intervalle de confiances sur les paramètres d'une loi de Weibull

Ajustement

Maximum de vraissemblance

Loi de probabilité : WEIBULL (3 paramètres)

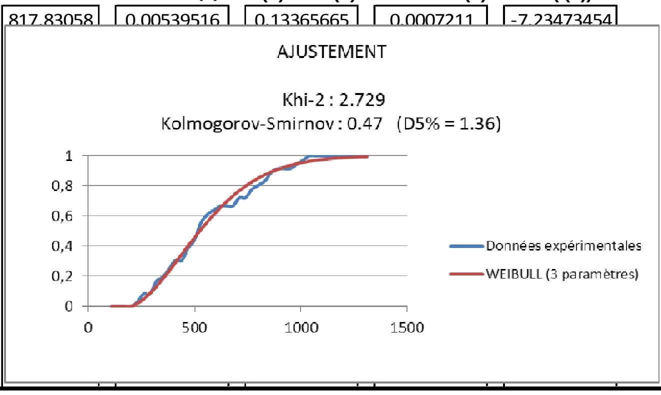
Bêta :	1,67956456
Sigma :	413,12811
Gamma :	191,325836

LN Vraisemblance : -243,002003

Non censurées

LN K (non censurées) : -243,002003

Variable	Taux : λ(ti)	R(ti) = 1-F(ti)	Densité : f(ti)	Ln(f(ti))
817,83058	0,00539516	0,13365665	0,0007211	-7,23473454



Taux de confiance : 60%

		Min	Max
Bêta :	1,679565	1,346538	2,012591
Sigma :	413,1281	353,2967	472,9595
Gamma :	191,3258	155,4351	227,2166

		Min	Max
Quantile 90 :	870,1311	808,6896	931,5726

Matrice de Fisher :

21,39995	-0,03441	0,116995
-0,03441	0,000595	0,000528
0,116995	0,000528	0,002139

Matrice de variance-covariance :

0,156575	21,31743	-13,8221
21,31743	5053,881	-2412,71
-13,8221	-2412,71	1818,577

Fischer

Remarques :

- Dans le cas d'un estimateur asymptotique, la confiance n'est véritablement garantie que lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini sans réelle maîtrise de la vitesse de convergence. En pratique, ces estimateurs sont utilisés quand n > 30.

- L'outil Gencab, utilisé ici, calcule la matrice de Fischer par une méthode générique discrète permettant de s'affranchir des expressions analytiques des dérivées de la log vraisemblance.

- **Cas f : Intervalle de confiance « exact »**

L'intervalle de confiance est dit exact s'il est fondé sur la distribution d'une loi de probabilité connue, telle que l'exponentielle ou la binomiale, par opposition à un intervalle de confiance approximatif.

Cela ne préjuge en rien de la justesse de l'intervalle de confiance.

Un intervalle de confiance peut être calculé par les méthodes de Bolshev[2] ou de Clopper-Pearson[3] pour la loi binomiale, qui ne sont pas développées ici.

[2] Bagdonavičius, V.,Nikoulina, V. and Nikulin, M. (1998). *Bolshev's method of confidence interval construction; Qüestiió*, 21, #3, 549-562

[3] C. J. Clopper and E. S. Pearson, *Biometrika*, Vol. 26, No. 4 (Dec., 1934), pp. 404-413, *The Use of Confidence or Fiducial Limits Illustrated in the Case of the Binomial*

- **Loi exponentielle**

- **Cas non censuré :** l'observation est menée jusqu'à la défaillance de n équipements et T correspond à la durée de fonctionnement cumulée.

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} ; \frac{2T}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}\right] \textit{ Bilatéral} \qquad Borne\ inférieure : \left[\frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha}(2n)}\right] \text{ unilatéral}$$

- **Cas tronqué :** l'observation est menée pendant un temps défini à l'avance T_{obs}. On observe alors r défaillances $(r \leq n)$ et le temps de fonctionnement cumulé est $T_r = \sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)T_{obs}$ où $X_{(i)}$ correspond aux instants de défaillances.

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2T_r}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r+2)} ; \frac{2T_r}{\chi^2_{\alpha/2}(2r)}\right] \textit{ Bilatéral} \qquad Borne\ inférieure : \left[\frac{2T_r}{\chi^2_{1-\alpha}(2r+2)}\right] \text{ unilatéral}$$

<u>Exemple 7</u> **: MTBF à 60% d'un composant électronique à l'issue d'un essai de fiabilité de 50 pièces pendant 1 000 heures durant lequel 2 pièces sont tombées en panne à 5 450 et 7 800 heures.**

Loi exponentielle

Confiance :	60%	
Tobs :	10000	hrs
Nb pièces :	50	
Nb défaillances r :	2	
Instants de défaillance :	5450	hrs
	7800	hrs
Tr :	493250	hrs
MTTF à 60% :	158837	hrs
Lambda à 60% :	6296	fits (hrs^{-1} * 10^9)

$$T_r = \sum_{i=1}^{r} X_{(i)} + (n-r)T_{obs}$$

$$b_i = \frac{2T_r}{\chi^2_{1-\alpha}(2r+2)}$$

Exponentielle

➢ Loi binomiale

- **Méthode de Clopper & Pearson :** Les intervalles sont obtenus par résolution des équations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\alpha}{2} \quad \text{bilatéral}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha \quad \text{unilatéral}$$

- **Méthode Bolshev :** Les intervalles sont de la forme :

$$IC_{1-\alpha}(p) = \left[1 - \beta_{1-\alpha/2}(n-k+1; k);\ 1 - \beta_{\alpha/2}(n-k; k+1)\right] \quad \text{bilatéral}$$

Où $\beta_{proba}(a; b)$est le $proba$-quantile d'une loi beta de paramètres a et b.

$$Borne\ inf\ : [1 - \beta_{1-\alpha}(n-k+1; k)] \quad Borne\ sup\ : \ [1 - \beta_{\alpha}(n-k; k+1)] \quad \text{unilatéral}$$

<u>Exemple 8</u> : Taux de défaut à 60% de confiance d'un lot de composants sachant que 3 composants d'un échantillon de 100 pièces de ce même lot se sont révélés défectueux

Loi Binomiale

taille échantillon n : 100

Clopper-Pearson

nb pannes	
0	0,014417009
1	0,062432717
2	0,133830317
3	0,189319957

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \alpha$$

Confiance : 60%

total 0,4

Risque = 40%

p 0,041507428

Erreur quadratique : 7,88861E-31

quant. beta 0,958492572

Bolshev

p 0,041507428

$$\widehat{Pmax} = 1 - \beta_{\alpha}(n-k; k+1)$$

Binomiale

- **Cas g : Estimation d'un quantile avec un niveau de confiance (méthode de Wilks)**

A partir d'un échantillon, la méthode de Wilks permet de déterminer un majorant ou un minorant de la valeur d'un quantile **α** au niveau de confiance **β**, noté $\mathbf{T_{\alpha,\beta}}$ (α n'est pas le niveau de risque).

L'estimateur est la valeur extrême de rang r d'un échantillon de taille N satisfaisant à la condition suivante :

$$\boxed{1-\sum_{N-r+1}^{N} C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{N-i} \geq \beta}$$

Exemple 9 : Trouver des majorants du quantile d'ordre 90 % à partir d'un échantillon de 20 valeurs

Estimation d'un quantile

Méthode de Wilks

$$\boxed{1-\sum_{N-r+1}^{N} C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{N-i} \geq \beta}$$

α : 90%
N : 20

Data	Rang
0,46639779	8
0,17978642	5
0,27481332	6
0,56716439	9
0,95346857	19
0,97662582	20
0,69763368	14
0,69135249	13
0,84389278	17
0,61412198	11
0,60035385	10
0,6457667	12
0,93859051	18
0,79088837	16
0,11083732	3
0,30561527	7
0,7840843	15
0,10276152	2
0,16997993	4
0,04801025	1

r	Quantile 90	β
1	0,976625822	87,84%
2	0,953468569	60,83%
3	0,938590514	32,31%

0	0,121576655	0,12157665
1	0,270170344	0,391747
2	0,285179807	0,67692681
3	0,190119871	0,86704668
4	0,089778828	0,9568255
5	0,031921361	0,98874687
6	0,008867045	0,99761391
7	0,001970454	0,99958436
8	0,000355776	0,99994014
9	5,27076E-05	0,99999285
10	6,44204E-06	0,99999929
11	6,50711E-07	0,99999994
12	5,4226E-08	1
13	3,70776E-09	1

Quantile

Exemple 10 : Taille minimale d'un échantillon permettant l'obtention d'un majorant de la valeur du quantile 95 à 95 % de confiance

L'estimation du quartile $T_{95,95}$ est donnée par la valeur extrême obtenue au cours d'au moins N simulations (r = 1) avec N donné par l'expression :

$$1-\alpha^N \geq \beta \text{ soit } \alpha^N \leq \beta\text{-}1 \text{ ou } N \geq \ln(\beta\text{-}1) / \ln(\alpha)$$

$$N \geq \ln(0{,}05) / \ln(0{,}95) = 58{,}4039748 \qquad \mathbf{N \geq 59}$$

Ce même quartile peut être estimé par la plus grande valeur à l'exclusion de la valeur extrême (r = 2) avec N donné par l'expression :

$$1-(N * \alpha^N (1-\alpha) + \alpha^N) \geq \beta \text{ soit } \mathbf{N \geq 93}$$

Ou par la plus grande valeur à l'exclusion des 2 valeurs extrêmes (r = 3) si **N ≥ 124**

La résolution de la formule de Wilks est traitée ci-dessous au moyen de l'outil GENCAB.

Taille d'un échantillon permettant l'obtention d'un quantile

Méthode de Wilks

α :	95%
β :	95%
r :	3
N :	124

$$1-\sum_{N-r+1}^{N} C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{N-i} \geq \beta$$

0,95047022 ≥ 0,95

0	0,00172873	0,00172873
1	0,01128223	0,01301096
2	0,03651881	0,04952978
3	0,07816307	0,12769285
4	0,12444384	0,25213669
5	0,15719222	0,40932891
6	0,16408662	0,57341553
7	0,14558061	0,71899614
8	0,11205876	0,83105489
9	0,07601647	0,90707136
10	0,04600997	0,95308133
11	0,02509635	0,97817767
12	0,0124381	0,99061577
13	0,00563995	0,99625572
14	0,00235351	0,99860923

Wilks 1