TP N° 61

Les plans d’expériences

L’objet de ce TP est de présenter les plans d’expériences et de montrer l’apport d’un outil d’optimisation globale à leur planification puis à leur résolution.

1 – Présenter la problématique générale des plans d’expériences

2 – Proposer des surfaces de réponse dans le cas linéaire et non linéaire

3 – Présenter des techniques de planification optimale

4 – Appliquer les méthodes des plans d’expériences aux essais en Sûreté de Fonctionnement

1 – Problématique générale des plans d’expériences

Un plan d'expériences est une suite ordonnée d'essais menés afin de connaitre l’influence des paramètres d'entrée (facteurs) sur les résultats (réponses).

Il permet d’identifier les facteurs les plus influents (analyse de la variance), les interactions entre ces derniers (corrélations) et d’ajuster puis valider un éventuel modèle mathématique du phénomène étudié (surface de réponse).

La problématique des plans d’expériences recouvre deux aspects :

- la planification que l’on cherche à élaborer pour obtenir un maximum d'informations à partir d’un nombre minimum d’essais ou pour rendre robuste une surface de réponse,
- l’exploitation des essais réalisés.

La planification des expériences à réaliser se présente sous la forme d’une matrice d’expérience constituée de n lignes d’essais, définies chacun par une configuration de valeurs de k facteurs.

	X_1	X_2	…	X_k	Y
1					
2					
…					
n					

Parmi les différents plans d’expériences, les plans factoriels assignent à chaque facteur sa valeur la plus basse (-1) et sa valeur la plus haute (+1) et limitent ainsi à 2^k le nombre d’essais. Ce nombre peut être encore réduit sans trop pénaliser la précision des résultats (plans factoriels fractionnaires).

2 - Surfaces de réponse

Le modèle mathématique utilisé pour décrire le phénomène étudié peut être de type linéaire ou non linéaire.

2.1 – Modèle linéaire

Un modèle linéaire est de la forme $Y = X\,\beta + \varepsilon$ avec Y la matrice des réponses, X la matrice des facteurs, β la matrice des paramètres à estimer et ε une matrice d’erreur ou de bruit.

Un modèle polynomial est linéarisable en considérant des facteurs multiplicatifs additionnels, comme le modèle complet suivant du second degré à 3 facteurs :

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_1^2 + a_5 X_2^2 + a_6 X_3^2 + a_7 X_1 X_2 + a_8 X_1 X_3 + a_9 X_2 X_3 + \varepsilon$$

La résolution d’un modèle linéaire peut s’effectuer de manière analytique par résolution d'un système d'équations linéaires : $\beta = (X^TX)^{-1} X^TY$. Cette estimation est de type moindres carrés :

$$\varepsilon^2 = (X\beta-Y)^T(X\beta-Y)$$

$$d\varepsilon^2/d\beta = 2X^TX\beta - 2X^TY$$

$$d\varepsilon^2/d\beta = 0 \Rightarrow \beta = (X^TX)^{-1} X^TY$$

La matrice d’information de Fisher est alors $1/\sigma^2\, X^TX$ en considérant un bruit de mesure uniforme.

La matrice de variance-covariance des paramètres (var β) est égale à $\sigma^2\,(X^TX)^{-1}$.

Si on considère une erreur de mesure non uniforme, on obtient :

$\beta = (X^T W^{-1} X)^{-1} X^T W^{-1} Y$ et var $\beta = (X^T W X)^{-1}$ avec W la matrice des poids inverse de la matrice de variance covariance des bruits de mesure.

Traité par l'outil Gencab, l'exemple suivant montre la résolution d'un modèle polynomial du second degré à 3 facteurs avec estimation des intervalles de confiance.

Plan d'expériences - Modèle linéaire : Y = X P + ε

Planification Exploita

	X_1	X_2	X_3
min :	0	0	0
max :	1	1	1

Taux de confiance : 60%

Bruit (sigma) : 0,1

Déterminant (Fisher) : 0,0002772

	Y	X_0	X_1	X_2	X_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	x_1X_2	x_1X_3	x_2X_3
1	0,64	1	0,57	0,6	0,2	0,33	0,36	0,04	0,34	0,11	0,12
2	0,82	1	0,46	0,06	0,18	0,21	0	0,03	0,03	0,08	0,01
3	0,59	1	0,64	0,98	0,53	0,41	0,96	0,28	0,63	0,34	0,52
4	0,94	1	0,47	0,19	0,97	0,22	0,04	0,94	0,09	0,46	0,18
5	0,24	1	0,4	0,75	0,78	0,16	0,56	0,61	0,3	0,31	0,58
6	0,51	1	0,4	0,15	0,03	0,16	0,02	0	0,06	0,01	0
7	0,6	1	0,53	0,2	0,99	0,28	0,04	0,98	0,1	0,52	0,19
8	0,6	1	0,55	0,05	0,84	0,3	0	0,71	0,03	0,46	0,04
9	0,81	1	0,73	0,63	0,87	0,54	0,4	0,75	0,46	0,63	0,55
10	0,15	1	0,68	0,45	0,77	0,46	0,21	0,6	0,31	0,52	0,35
11	0,94	1	0,95	0,96	0,22	0,91	0,93	0,05	0,92	0,21	0,21
12	0,44	1	0,27	0,47	0,56	0,07	0,22	0,31	0,13	0,15	0,26
13	0,9	1	0,75	0,12	0,79	0,56	0,01	0,62	0,09	0,59	0,09
14	0,15	1	0,5	0,54	0,97	0,25	0,29	0,94	0,27	0,48	0,52
15	0,76	1	0,51	0,8	0,71	0,26	0,64	0,51	0,41	0,36	0,57
16	0,01	1	0,08	0,45	0,42	0,01	0,21	0,17	0,04	0,03	0,19
17	0,2	1	0,22	0,26	0,57	0,05	0,07	0,33	0,06	0,13	0,15
18	0,75	1	0,23	0,31	0,2	0,05	0,09	0,04	0,07	0,05	0,06
19	0,65	1	0,45	0,84	0,17	0,2	0,71	0,03	0,38	0,08	0,14
20	0,66	1	0,25	0,4	0,03	0,06	0,16	0	0,1	0,01	0,01
21	0,93	1	0,29	0,42	0,18	0,08	0,18	0,03	0,12	0,05	0,08
22	0,3	1	0,35	0,97	0,18	0,12	0,95	0,03	0,34	0,06	0,17
23	0,09	1	0,33	0,3	0,33	0,11	0,09	0,11	0,1	0,11	0,1
24	0,85	1	0,04	0,88	0,86	0	0,78	0,75	0,04	0,04	0,76
25	0,28	1	0,24	0,3	0,1	0,06	0,09	0,01	0,07	0,02	0,03
26	0,38	1	0,13	0,16	0,66	0,02	0,02	0,44	0,02	0,09	0,1
27	0,95	1	0,43	0,87	0,61	0,18	0,76	0,37	0,37	0,26	0,53
28	0,61	1	0,47	0,76	0,96	0,23	0,57	0,93	0,36	0,46	0,73

$Y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_1^2 + a_5 X_2^2 + a_6 X_3^2 + a_7 X_1X_2 + a_8 X_1X_3 + a_9 X_2X_3$

	P	min	max
a_0 :	0,57	0,53	0,6
a_1 :	0,67	0,58	0,76
a_2 :	-0,8	-0,9	-0,7
a_3 :	-0,8	-0,8	-0,7
a_4 :	0,61	0,54	0,67
a_5 :	0,97	0,92	1,02
a_6 :	0,74	0,69	0,78
a_7 :	-0,9	-0,9	-0,8
a_8 :	-0,5	-0,6	-0,5
a_9 :	0,38	0,35	0,42

	x								
1	0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

y	Var(y)	min	max
0,43	0	0,42	0,44

Var(P)

0,05	-0,1	-0,1	-0,1	0,04	0,05	0,02	0,04	0,07	0,02
-0,1	0,33	0,1	0,11	-0,2	-0,1	-0	-0,1	-0,2	-0
-0,1	0,1	0,19	0,05	-0	-0,1	-0	-0,1	-0,1	-0
-0,1	0,11	0,05	0,13	-0	-0	-0,1	-0	-0,1	-0
0,04	-0,2	-0	-0	0,15	0,01	0,01	-0	0,07	0,01
0,05	-0,1	-0,1	-0	0,01	0,1	0,01	0,03	0,07	0,02
0,02	-0	-0	-0,1	0,01	0,01	0,08	0,02	-0	-0
0,04	-0,1	-0,1	-0	-0	0,03	0,02	0,13	0,04	0
0,07	-0,2	-0,1	-0,1	0,07	0,07	-0	0,04	0,21	0,01
0,02	-0	-0	-0	0,01	0,02	-0	0	0,01	0,05

Modèle linéaire

Feuille de calcul disponible par double clic sur l'icône :

2.2 – Modèle non linéaire

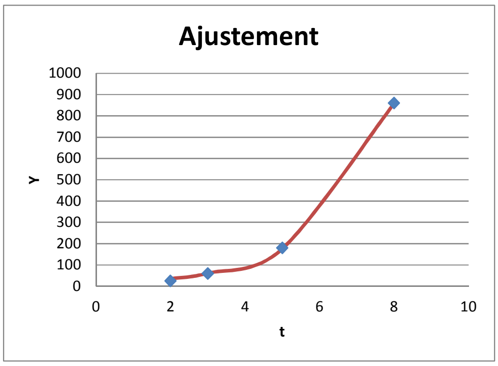
La résolution d'un modèle non linéaire impose l'usage d'un outil d'optimisation globale comme l'exemple de pharmacocinétique suivant, traité par la méthode des moindres carrés.

Modèle non linéaire $Y = a_0 e^{-a1\,t} + \varepsilon$

w : 15 $\Sigma(Y(t_i) - Y_i)^2$: 145,6102

a_0	a_1
12,51	-0,53

					Fisher					
	Y_i	t_i	Y(t)	$(Y(t_i) - Y_i)^2$	I11	I22	I10=I01	D	a_0	a_1
1	25	2	36	120,9977	0,037196	22,456	-0,914	1E-16		
2	59	3	61,1	4,306786	0,144804	168,626	-4,88	0,6041		
3	180	5	176	17,72513	1,04539	3566,74	-60,2	104,61		
4	860	8	858	2,580564	22,85008	214188	-2203	40039	12,29	-0,53
		20			1,69E+09	1E+14	-3E+10	2E+23	12,29	-0,53



Non linéaire 1

L'ajustement peut être également réalisé par la méthode du maximum de vraisemblance, comme traité ci-après, en considérant que le bruit de mesure est distribué suivant une loi normale. L'outil Gencab permet alors d'obtenir la matrice de Fisher au moyen d'une méthode numérique qui donne des résultats voisins de celle calculée de manière analytique.

Modèle non linéaire $Y = a_0 e^{-a_1 t} + \varepsilon$

w : 15 | $\Sigma(Y(t_i) - Y_i)^2$: 139,6805 | a_0 : 12,29 | a_1 : -0,53 | $\Sigma Ln(L)$: -3,9862

Taux de confiance : 90%

	Y_i	t_i	Y(t)	$(Y(t_i) - Y_i)^2$	I11 (Fisher)	I22	I10=I01	D	a_0	a_1	L (Vraisemblance)	Ln(L)
1	25	2	35,5	111,1096	0,037196	22,456	-0,914	1E-16			0,31166	-1,1658
2	59	3	60,5	2,103437	0,144804	168,626	-4,88	0,6041			0,39708	-0,9236
3	180	5	175	26,21422	1,04539	3566,74	-60,2	104,61			0,37637	-0,9772
4	860	8	861	0,253297	22,85008	214188	-2203	40039	12,29	-0,53	0,39872	-0,9195
		20			1,69E+09	1E+14	-3E+10	2E+23	12,29	-0,53		

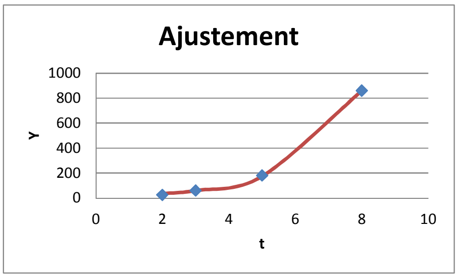
	Min	Max
a_0 : 12,28531	8,516468	16,05416
a_1 : -0,531139	-0,570063	-0,492215

Matrice de Fisher :

22,85008	-2203,224
-2203,224	214222,3

Variance-covariance :

5,250037	0,053995
0,053995	0,00056



Non linéaire 2

L'outil permet ainsi d'obtenir un intervalle de confiance pour chacun des paramètres et pour l'estimation de la réponse d'une configuration de facteurs.

Plan d'expériences - Modèle non linéaire

Planificati | Exploitati

min : -20 | max : 20 | Somme : -3,99 | Taux de confiance : 60% | Bruit (sigma) : 15

	Y	X_1	y(X)	R	ln(L)
1	25	2	35,54	0,312	-1,17
2	59	3	60,45	0,397	-0,92
3	180	5	174,9	0,376	-0,98
4	860	8	860,5	0,399	-0,92

		min	max
Va_1 :	12,29	11,32	13,25
Va_2 :	-0,53	-0,54	-0,52

x	y	Var(y)	min	max
2	35,54	24,57	33,46	37,63

h : 1E-10

35,54
35,54

dY/dVa_1 : 2,893
dY/dVa_2 : -71,1

Matrice de Fisher :

22,85	-2203
-2203	2E+05

Variance-Covariance :

5,252	0,054
0,054	6E-04

Non linéaire 3

3 – Planification optimale

L'optimisation d'un plan d'expériences peut s'effectuer selon divers critères tels que :

- la minimisation du nombre d'essais nécessaires à l'estimation des paramètres du modèle de surface de réponse,
- la précision de cette estimation,
- La robustesse du modèle à la prédiction dans toutes les configurations de valeurs prises par les différents facteurs.

Cherchant à minimiser la variance des estimations, la méthode D-optimale répond aux 2 premiers critères. Des techniques d'occupation optimale de l'espace des configurations d'essais, telle que la maximisation des distances minimales, répondent au troisième critère.

3.1 – Méthode D-optimale

La méthode D-optimale[1] consiste à maximiser le déterminant de la matrice de variance covariance (inverse de la matrice de Fisher) afin de minimiser la variance des estimateurs et donc les intervalles de confiance des estimations.

Cette méthode est mise en œuvre dans les exemples précédents afin de déterminer des conditions optimales d'essais supplémentaires.

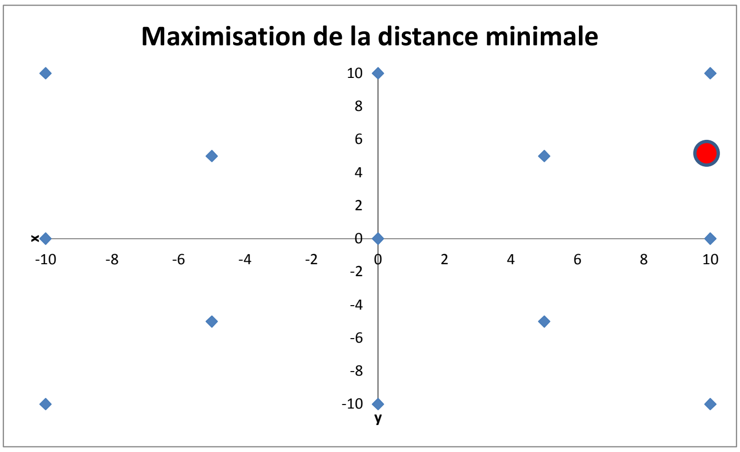
3.2 – Occupation optimale de l'espace

La normalisation préalable des différents facteurs permet de définir une notion de distance entre les conditions d'essais. La maximisation des distances minimales permet alors d'occuper l'espace de manière homogène comme le montre l'exemple suivant limité à 2 facteurs.

Plan d'expérience - Maximisation de la distance minimale

x	y	min di²
10	5	0

xi	yi	di²
10	10	25
-10	-10	625
-10	10	425
10	-10	225
0	0	125
0	-10	325
-10	0	425
0	10	125
10	0	25
-5	5	225
5	5	25
5	-5	125
-5	-5	325
10	5	0



---

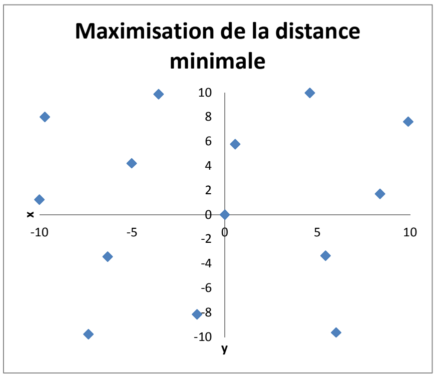
[1] Optimal design, D-optimality, http://en.wikipedia.org/wiki/Optimal_design

Maximisation de la distance maximale

Cette optimisation des distances, réalisée ici de manière séquentielle, peut l'être également de manière simultanée en multipliant le nombre de variables (26 dans l'exemple ci-desous).

Plan d'expérience - Maximisation simultanée de la distance minimale

	xi	0	-7,35	4,593	8,376	0,574	-6,31	9,91	-3,57	-10	-1,49	-5,02	-9,71	6,018	5,45
xi	yi	0	-9,79	9,958	1,7	5,774	-3,43	7,62	9,868	1,229	-8,15	4,21	7,991	-9,64	-3,34
0	0		149,8	120,3	73,04	33,67	51,63	156,3	110,1	101,5	68,71	42,9	158,1	129,1	40,86
-7,35	-9,79	149,8		532,6	379,3	305	41,52	601	400,7	128,4	37,01	201,4	321,6	178,7	205,4
4,593	9,958	120,3	532,6		82,5	33,66	298,2	33,73	66,64	289,1	365,1	125,4	208,3	386	177,6
8,376	1,7	73,04	379,3	82,5		77,46	242,1	37,4	209,4	337,8	194,4	185,7	366,5	134,1	33,96
0,574	5,774	33,67	305	33,66	77,46		132,1	90,57	33,94	132,4	198,2	33,71	110,6	267,1	106,8
-6,31	-3,43	51,63	41,52	298,2	242,1	132,1		385,3	184,3	35,26	45,61	60,02	141,9	190,6	138,4
9,91	7,62	156,3	601	33,73	37,4	90,57	385,3		186,8	437,2	378,8	234,5	384,9	312,9	140
-3,57	9,868	110,1	400,7	66,64	209,4	33,94	184,3	186,8		116	329,1	34,11	41,18	472,4	255,8
-10	1,229	101,5	128,4	289,1	337,8	132,4	35,26	437,2	116		160,4	33,7	45,81	374,6	259,5
-1,49	-8,15	68,71	37,01	365,1	194,4	198,2	45,61	378,8	329,1	160,4		165,3	328,2	58,57	71,34
-5,02	4,21	42,9	201,4	125,4	185,7	33,71	60,02	234,5	34,11	33,7	165,3		36,28	313,5	166,6
-9,71	7,991	158,1	321,6	208,3	366,5	110,6	141,9	384,9	41,18	45,81	328,2	36,28		558	358,1
6,018	-9,64	129,1	178,7	386	134,1	267,1	190,6	312,9	472,4	374,6	58,57	313,5	558		39,97
5,45	**-3,34**	40,86	205,4	177,6	33,96	106,8	138,4	140	255,8	259,5	71,34	166,6	358,1	39,97	
	di^2 max :	33,67	37,01	33,66	33,96	33,66	35,26	33,73	33,94	33,7	37,01	33,7	36,28	39,97	33,96



max (di^2 min) : 33,6625369

Maximisation simultanée

3 – Essais en Sûreté de fonctionnement

Outre l'application de la méthode D-optimale aux systèmes monocoup traitée dans le TP précédent (n°60), des essais de fiabilité (exponentielle) et de dégradation (processus de Wiener) accélérés en température (Arrhenius) sont traités ci-après.

D-optimale - Loi exponentielle accélérée

lbd	Ea
0,44701302	1,36558

Température	FA	E(T)	I00	I11	I01
-100	0,0853455	16649,079	2019024	791,741	-4,00E+04

Taux de confiance : 90%

k: 0,00008617

Ln vraisemblance : -300

Déterminant : 7,209E+09

Last_lbd	Last_Ea
0,0007	0,08746

	Min	Max
Lbd : 0,447013	-0,00064	0,002046
Ea : 1,36558	-0,20031	0,37524

T référence °C: 25

	Température	Temps cumulé	Facteur d'accélération	Densité de probabilité	Ln(L)	FA	I00	I11	I01 = I10	lbd	Ea	Température
1	125	627	635201,1336	0	-100	2,3533	2019023,6	95,739056	13903,216			
2	75	800	2081,28446	0	-100	1,6313	4038047,2	127,04572	21853,618			
3	40	1259	12,78843088	0	-100	1,1773	6057070,8	130,52869	24505,446	0,0007	0,08746	0,75324832
	-100											

(Colonnes lbd, Ea, Température : **Résultats**)

Matrice de Fisher : (numérique)

6057681	24505,45
24505,45	131,8027

Variance-covariance :

6,66E-07	-0,00012
-0,00012	0,030609

Matrice de Fisher (analytique)

I00 $1/\lambda^2$

I11 $(\ln(Fa)/Ea)^2$

I02 $\ln(Fa)/\lambda Ea$

Déterminant

$D=I00(I11\times I22-I12^2)-I11\times I02^2$ $(I01=I10=0)$

Exponentielle

D-optimale - Processus de Wiener linéaire accéléré

m	s	Ea
0,1801	0,2944	0,2369

Temp	Fa	E(Z)	I00	I11	I22	I02	I12
250	52,97	1144	61096	23,068	556289	184344	56,898

Taux de confiance : 90%

T référence °C : 25

Ln vraisemblance : -9,037

Déterminant : 3E+11

last m	last s	Last Ea
0,1801	0,2944	0,2369

	t	T°C	Z	Fa	f(t)	ln(f(t))	Last Fa	I00	I11	I22	I02	I12			
1	0		0												
2	100	25	20	1	0,1078	-2,227	1	1153,4	23,068	0	0	0			
3	200	75	80	3,7641	0,0275	-3,592	3,7651	5496,1	46,136	4401,8	4376,1	19,002			
4	300	95	190	5,7826	0,04	-3,218	5,7847	12168	69,204	16273	13277	44,16	0,1801	0,2944	0,2369

		Min	Max
m :	0,1801	0,16518815	0,19501007
s :	0,2944	0,09673001	0,49215322
Ea :	0,2369	0,23694659	0,23694659

Matrice de Fisher : (numérique)

12168,1185	0,00207958	13277,2238
0,00207958	69,2038499	44,1604284
13277,2238	44,1604284	16487,8973

Variance-covariance :

0,00068585	0,00035301	-0,00055324
0,00035301	0,0146565	-0,00032353
-0,00055324	-0,00032353	0,00050702

Matrice de Fisher (analytique)

I00 $n\delta t\alpha/\sigma^2$

I11 $2n/\sigma^2$

I22 $(-1/(2Ea^2))\times[2\Sigma(\ln\alpha i)-((2\delta t\mu^2)/\sigma^2)\Sigma(\alpha i\times(\ln\alpha i)^2)-\Sigma(\ln\alpha i)^2]$

I02 $[(\mu\delta t)/(\sigma^2 Ea)]\Sigma(\alpha i\times\ln\alpha i)$

I12 $[1/(Ea\sigma)]\Sigma\ln\alpha i$

Déterminant

$D=I00(I11\times I22-I12^2)-I11\times I02^2$ $(I01=I10=0)$

Wiener

La méthode D-optimale à tendance à proposer ici les limites du domaine de variation en température afin de maximiser la précision des estimations. Il n’en serait pas forcément de même si l’essai de fiabilité était censuré, ce qui modifierait l’expression de la vraisemblance.

Les matrices calculées de manières analytique et numérique apparaissent toujours voisines.