

## TP N° 64

# Planification optimale d'essais accélérés de fiabilité d'un équipement soumis à usure

L'objet de ce TP est d'optimiser la planification d'essais de fiabilité accélérés en température et en fatigue en se fondant sur la D-optimalité et sur la méthode Caboum.

La fiabilité de l'équipement est modélisée par une loi de Weibull à 2 paramètres couplée à une loi d'Arrhenius pour la température et un modèle de Basquin pour le niveau vibratoire.

Le but est d'améliorer la précision des résultats obtenus à l'issue d'une campagne d'expérimentations ou d'en diminuer le coût en réduisant le nombre d'essais.

### **1 – Ajuster une loi de Weibull couplée aux modèles d'accélération d'Arrhenius et de Basquin à partir de données simulées partiellement censurées**

Le but de l'exercice est de retrouver les 4 paramètres a priori inconnus du modèle utilisé pour simuler les essais.

### **2 – Appliquer la D-optimalité à une séquence d'essais de durée limitée**

### **3 – Appliquer un traitement bayésien à ces mêmes essais par la méthode Caboum, en exploitant une connaissance a priori sur les paramètres recherchés.**

# 1 - Ajustement d'une loi de Weibull complée aux modèles d'accélération d'Arrhenius et de Basquin

Le modèle de fiabilité utilisé ici est une loi de Weibull couplée à une loi d'Arrhenius pour la température et un modèle de Basquin pour le niveau vibratoire.

La loi d'Arrhenius s'exprime de la manière suivante {1} avec  $E_a$  l'énergie d'activation (inconnue) et  $K$  la constante de Boltzmann ( $8,6171 \cdot 10^{-5} \text{ eV/}^\circ\text{K}$ ).

$$AF_A = \exp(E_a/K (1/(273 + T_{Ref}^\circ\text{C}) - 1/(273 + T^\circ\text{C}))) \quad \{1\}$$

Le modèle de Basquin {2} est employé traditionnellement comme modèle d'accélération en fatigue en fonction du niveau vibratoire ( $C_A$ ) par rapport à un niveau de référence ( $C_R$ ). Une valeur Grms (Root-Mean-Square Acceleration) peut être utilisée pour exprimer l'énergie globale d'une vibration aléatoire.

$$AF_B = (C_A / C_R)^p \quad \{2\}$$

Le facteur d'accélération globale est le produit des 2 facteurs {3}.

$$AF = AF_A * AF_B \quad \{3\}$$

L'estimation des paramètres de la loi de Weibull ( $\beta$ ,  $\sigma$ ) et des lois d'accélération ( $E_a$ ,  $p$ ) s'effectue par la méthode du maximum de vraisemblance qui consiste à maximiser le produit des probabilités (ou somme des logarithmes) donné par le modèle pour obtenir les données observées, soit la densité pour les données non censurées et la fiabilité en cas de censures à droite.

La densité de la loi de Weibull accélérée à 2 paramètres est donnée par l'expression {4} et celle de la fiabilité par l'expression {5}.

$$f_A(X_i; \beta, \sigma, p) = AF * f_R(AF * X_i; \beta, \sigma) \quad \text{avec} \quad f(X_i; \beta, \sigma) = \frac{\beta}{\sigma} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^\beta\right) \quad \{4\}$$

$$F_A(X_i; \beta, \sigma, p) = F_R(AF * X_i; \beta, \sigma) \quad \text{avec} \quad F(X_i; \beta, \sigma) = \exp\left(-\left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^\beta\right) \quad \{5\}$$

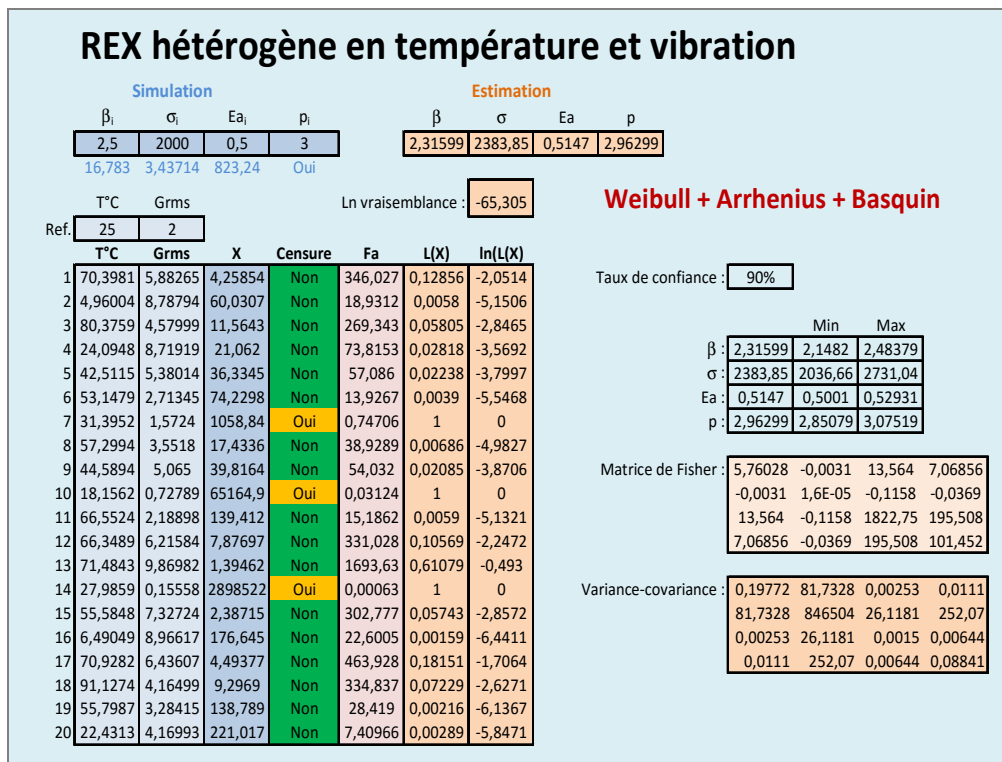


Figure 1. Ajustement



Dans l'exemple traité en figure 1, les résultats d'essais ( $X$ ) ont été simulés au moyen de la fonction inverse de la loi de fiabilité accélérée {6} de paramètres  $\beta_i = 2,5$ ,  $\sigma_i = 2000$ ,  $Ea_i = 0,5$  et  $p_i = 3$ . L'estimation permet de retrouver approximativement ces mêmes paramètres  $\beta = 2,3$ ,  $\sigma = 2384$ ,  $Ea = 0,51$  et  $p = 2,96$ .

$$X_i = -AF * \sigma (\ln(alea))^{1/\beta} \quad \{6\}$$

Au terme de l'estimation, la matrice de Fisher est calculée par une méthode numérique propre à l'outil d'optimisation Gencab. L'inversion de celle-ci permet d'obtenir la matrice de variance-covariance qui est utilisée pour estimer des intervalles de confiance asymptotiques sur chacun des paramètres par la méthode de Wald (une trentaine de données est généralement requise pour pouvoir utiliser un estimateur asymptotique).

Représentées en figure 2, les fonctions de vraisemblance et de log vraisemblance présentent des surfaces quasi planes, ce qui montre l'intérêt d'un outil d'optimisation globale, et non locale, pour effectuer un ajustement de qualité par la méthode du maximum de vraisemblance.

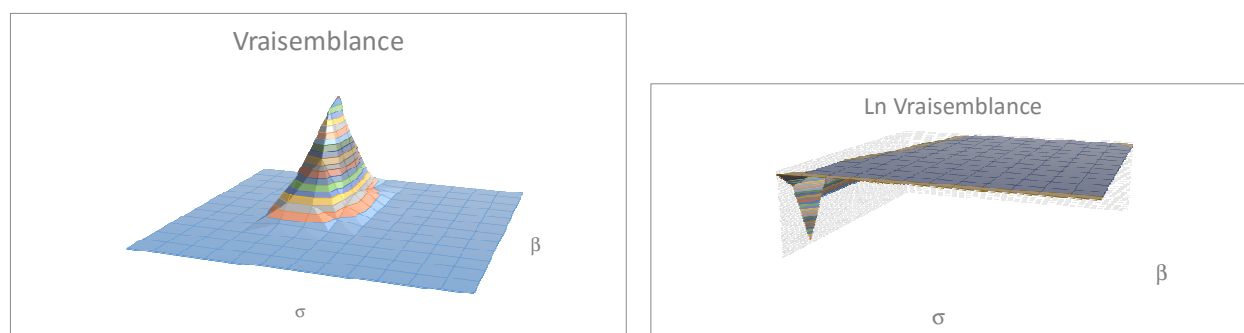


Figure 2. Vraisemblance et Ln Vraisemblance

## 2 – Application de la D-optimalité à une séquence d'essais de durée limitée

Dans les plans d'expériences (design of experiments) la planification optimale (optimal designs) consiste à élaborer des plans expérimentaux qui sont optimaux par rapport à un critère statistique. Parmi les critères statistiques envisagés, le plus employé est la D-optimalité qui consiste à maximiser le déterminant de la matrice de Fisher (inverse de la matrice de variance covariance) afin de minimiser la variance des estimateurs et d'augmenter ainsi la précision des résultats.

Les conditions d'essais préconisés par la méthode D-optimale sont choisis de manière à conforter l'estimation courante établie à partir des essais déjà réalisés (ou d'une connaissance a priori). La planification est séquentielle si l'on ne cherche qu'à déterminer les conditions de l'essai suivant ou par lot si les conditions de plusieurs essais sont définies simultanément. Ces conditions d'essais constituent autant d'inconnues (covariables) qui seront déterminées en maximisant le déterminant de la matrice de Fisher.

Les essais réalisés dans l'exemple de la figure 3 sont séquentiels. La log vraisemblance est la somme des logarithmes de la densité pour l'ensemble des résultats d'essais non censurés ou de la fiabilité en cas de censures à droite, soit un fonctionnement sans panne pendant toute la durée d'essai considérée ici constante ( $T = 500$  heures).

La matrice de Fisher peut se calculer de manière analytique par double dérivation de la log vraisemblance puis calcul de l'espérance {7}. Cette matrice est symétrique. Ces termes et son déterminant sont calculés à partir des résultats d'essais déjà réalisés et des conditions d'essais à planifier qui constituent autant d'inconnues à estimer.

$$F = I_n(\beta, \sigma, Ea, p) = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta \partial Ea} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \beta \partial p} \\ \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma \partial \beta} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma \partial Ea} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial \sigma \partial p} \\ \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea \partial \beta} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea^2} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial Ea \partial p} \\ \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p \partial \beta} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p \partial Ea} & \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X; \beta, \sigma, Ea, p)}{\partial p^2} \end{pmatrix} \quad \{7\}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta^2} = \frac{-n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \left[ \ln \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right) \right]^2 - k \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \left( \ln \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right) \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \left( \beta \ln \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right) + 1 \right) + \frac{k}{\sigma} \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \left( 1 + \beta \ln \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right) \right) = \frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial \beta}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma^2} = \frac{n\beta}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^n \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \left( \frac{\beta(\beta+1)}{\sigma^2} \right) - k \frac{\beta(\beta+1)}{\sigma^2} \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \beta \partial p} = n \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) \left[ \beta \ln \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right) + 1 \right] - k \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) \left[ \beta \ln \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right) + 1 \right]$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial \sigma \partial p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \beta^2 \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) + k \beta^2 \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) \frac{1}{\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial p^2} = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \beta^2 \left( \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) \right)^2 - k \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \beta^2 \left[ \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) \right]^2$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea^2} = \frac{k\beta^2}{K^2} \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \left( \frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right)^2 - \sum_{i=1}^n \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \frac{\beta^2}{K^2} \left( \frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right)^2$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea \partial \beta} = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right) \left[ n - k\beta \ln \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right) \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta - k \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n \beta \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \ln \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right) - \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea \partial \sigma} = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right) \left[ \frac{k\beta^2}{\sigma} \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta + \sum_{i=1}^n \frac{\beta^2}{\sigma} \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 \text{Ln } L(X_1, \dots, X_n; \beta, \sigma, p)}{\partial Ea \partial p} = \frac{1}{K} \left( \frac{1}{273 + T_{ref}} - \frac{1}{273 + T} \right) \left[ -k\beta^2 \left( \frac{AF * T}{\sigma} \right)^\beta \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) - \sum_{i=1}^n \beta^2 \left( \frac{AF * X_i}{\sigma} \right)^\beta \ln \left( \frac{C_A}{C_R} \right) \right]$$

Un nombre minimum d'essais est nécessaire pour réaliser une première estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance (6 dans cet exemple).

Les conditions des suivants ont été définies de manière séquentielle par la méthode D-optimale à partir de l'estimation courante des paramètres, inscrits dans les quatre dernières colonnes de la table.

Pour le prochain essai, la température et le niveau de vibration est calculé en maximisant le déterminant de la matrice de Fisher dans laquelle la densité de probabilité et la fiabilité de l'essai suivant sont pondérées respectivement par la probabilité de défaillance avant et après T.

Dans le cas non censuré, l'espérance de la variable peut être calculée par intégration numérique ou à partir de la formule {7}.

$$E(X / X < T) = \int_0^T R(t) dt = \frac{1}{F_a} \int_0^T e^{-\left(\frac{t}{\sigma}\right)^\beta} dt = \frac{1}{F_a} \frac{\sigma}{\beta} \gamma \left[ \frac{1}{\beta}, \left( \frac{T}{\sigma} \right)^\beta \right] = \frac{1}{F_a} \frac{\sigma}{\beta} \Gamma \left( \frac{1}{\beta} \right) \int_0^{\left(\frac{T}{\sigma}\right)^\beta} f_\gamma \left( \frac{1}{\beta}, 1 \right) dt \quad \{7\}$$

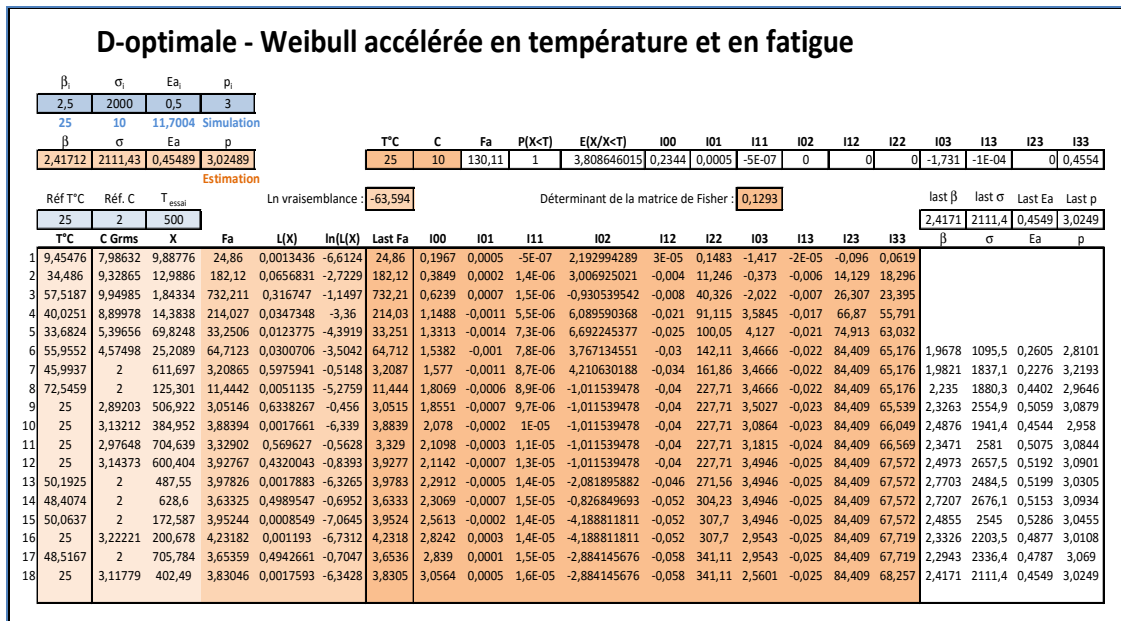


Figure 3. Essais de fiabilité accélérés en température et en vibration

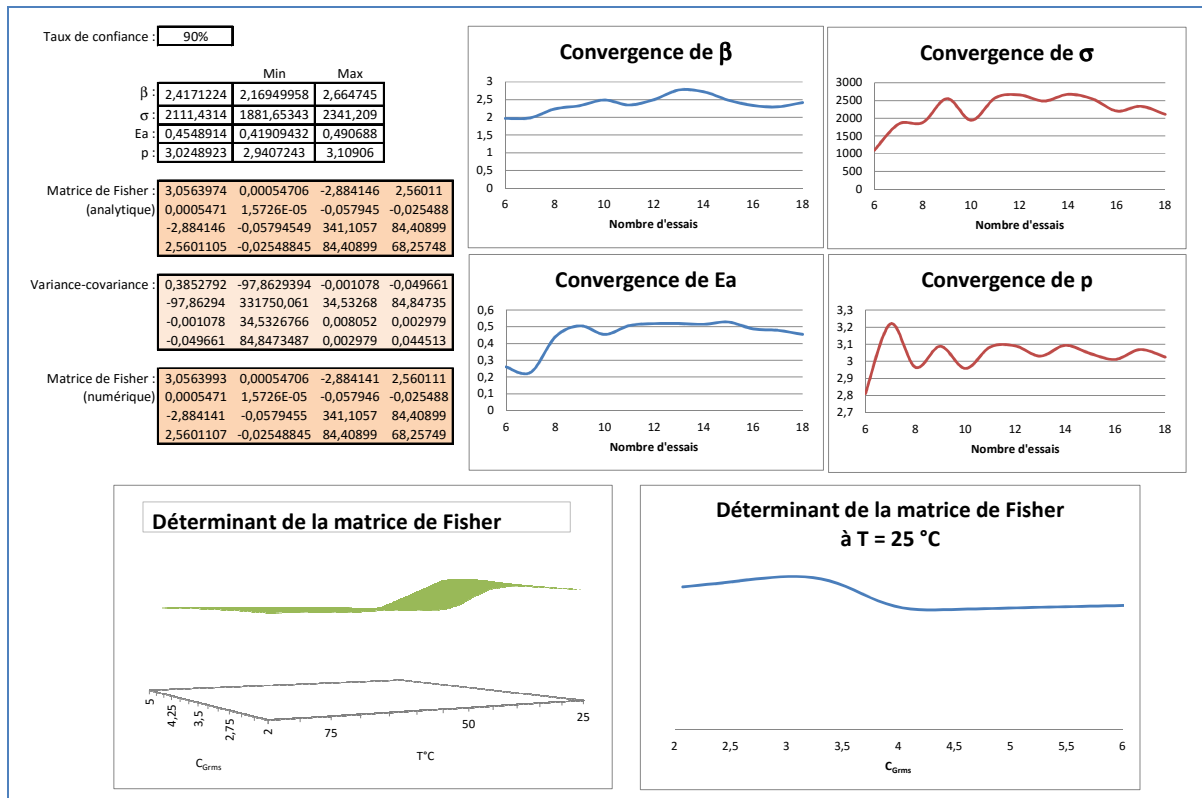


Figure 4. Résultats



Feuille de calcul

La figure 4 montre la convergence des quatre estimateurs au cours des essais qui se rapprochent des valeurs des paramètres utilisés pour simuler la loi de fiabilité accélérée :  $\beta_i = 2,5$ ,  $\sigma_i = 2000$ ,  $Ea_i = 0,5$  et  $p_i = 3$ .

Elle donne également l'expression finale de la matrice de Fisher calculée de manière analytique et par une méthode numérique propre à l'outil d'optimisation, ce qui permet de vérifier la justesse des formules utilisées avec une grande précision.

La matrice de variance-covariance est calculée par inversion de la première matrice et est utilisée pour obtenir des intervalles de confiance asymptotiques sur chacun des paramètres par la méthode de Wald. La courbe d'évolution du déterminant de la matrice de Fisher est également représentée.

Le maximum du déterminant de la matrice de Fisher correspond au meilleur compromis entre un faible facteur d'accélération apportant de la précision à l'estimation et un risque de censure si l'équipement fonctionne encore à la fin de la durée d'essai ( $T = 500$  heures). Durant les essais, ce maximum correspond à une température optimale au niveau de vibration minimale ou au niveau de vibration optimal à la température minimale, selon l'estimation courante des paramètres qui modifie la ligne de crête de la courbe d'évolution du déterminant de la matrice de Fisher.

### 3 – Traitement bayésien par la méthode Caboum

Une estimation par la méthode du maximum de vraisemblance ne peut être réalisée qu'à partir d'un certain nombre de données qui satisfont des conditions propres au modèle considéré.

A partir d'une connaissance a priori, les essais correspondants peuvent être remplacés par des essais virtuels par application d'une méthode bayésienne.

La méthode Caboum consiste à transformer la connaissance a priori en un minimum d'essais virtuels, au moyen de deux boucles d'optimisation imbriquées. La première estime les paramètres recherchés à partir de résultats d'essais virtuels par la méthode du maximum de vraisemblance sous le contrôle de la seconde qui veille à ce que la configuration d'essais conduise à une estimation conforme à la connaissance a priori tout en satisfaisant les conditions de faisabilité propres à l'estimation.

*Boucle principale : Recherche d'une configuration d'essais  $X_1 \dots X_p$*

*Critère :  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  a priori      Contrainte : Conditions de faisabilité propres à l'estimation*

*Boucle secondaire : Estimation de  $\hat{\theta}$  à partir de  $X_{1i}, \dots, X_{pi}$ , par la méthode du maximum de vraisemblance*

Les essais virtuels peuvent être actualisés à partir de l'estimation courante des paramètres, durant toute la séquence d'expérimentation, afin de diminuer le poids de la connaissance a priori initiale.

Au terme de la campagne d'essais, l'estimation des paramètres peut être réalisée à partir de l'ensemble des résultats d'essais ou de ceux des seuls essais effectués, en supprimant l'a priori, si les conditions relatives à l'estimation restent satisfaites.

L'exemple de la figure 5 reprend celui de la figure 4 en transformant une connaissance a priori sur la valeur des différents paramètres ( $\beta_i = 2$ ,  $\sigma_i = 1000$ ,  $Ea_i = 0,3$  et  $p_i = 1,3$ ) en 6 essais virtuels.

## D-optimale - Weibull accélérée en température et en fatigue

$\beta_0$		$\sigma_0$		$Ea_0$		$p_0$														
2	1000	0,3	1,3																	
A priori																				
$\beta_1$		$\sigma_1$		$Ea_1$		$p_1$														
2,5	2000	0,5	3																	
73,0175 8,61522 1,88061 Simulation																				
$\beta$		$\sigma$		$Ea$		$p$														
2,06116	1486,78	0,3316	1,4283																	
Estimation																				
Réf T°C	Réf. C	T <sub>essai</sub>	Ln vraisemblance : <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-27,505</span>		Déterminant de la matrice de Fisher : <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0,0077</span>				last $\beta$	last $\sigma$	Last Ea	Last p								
25	2	500							2,0612	1486,8	0,3316	1,4283								
T°C	C Grms	X	Fa	L(X)	ln(L(X))	Last Fa	I00	I01	I11	I02	I12	I22	I03	I13	I23	I33	$\beta$	$\sigma$	Ea	p
1 100	2	105,743	13,4175	0,0071385	-4,9422	13,418	0,2374	0,0001	1,7E-06	-1,405866766	-0,02	236,53	0	0	0	0				
2 25	15	46,3589	17,7766	0,0097966	-4,6257	17,777	0,5759	0,0008	1,6E-06	-1,405866766	-0,02	236,53	-2,144	-0,002	0	5,1113				
3 50	10	89,9678	27,0655	0,0039905	-5,5238	27,066	1,4842	-0,0022	8,5E-06	12,38578536	-0,044	343,23	5,2202	-0,014	56,974	35,533				
4 30	4	177,136	3,33048	0,001492	-6,5076	3,3305	1,8467	-0,0015	8E-06	11,65661138	-0,044	343,49	4,4337	-0,015	57,256	35,837				
5 80	12	18,5556	96,6598	0,0375191	-3,2829	96,66	2,1339	-0,0022	1,1E-05	17,97472013	-0,07	573,74	6,2994	-0,022	125,25	55,915				
6 100	15	2,19918	238,518	0,0973936	-2,329	238,52	2,496	-0,0014	1,1E-05	9,095109551	-0,073	604,16	4,0145	-0,023	133,07	57,929	1,9991	999,64	0,2902	1,2935
7 25	2,82822	685,111	1,64035	0,7456945	-0,2934	1,6403	2,5999	-0,0014	1,2E-05	9,095109551	-0,073	604,16	3,9915	-0,023	133,07	58,079	2,0612	1486,8	0,3316	1,4283

Figure 5. Transformation de l'a priori en essais virtuels



Feuille de calcul