

TP N° 68

Démarche de modélisation markovienne¹

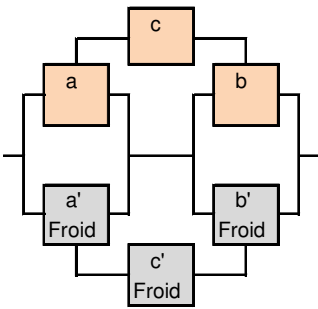
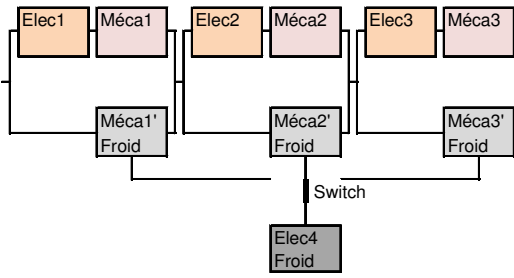
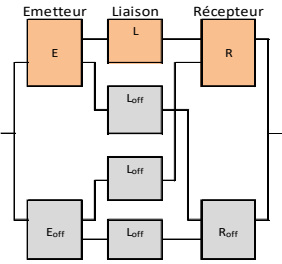
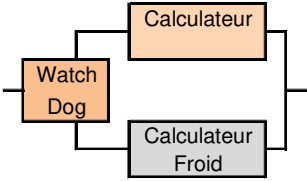
L'objet de ce TP est de présenter une démarche de modélisation markovienne des architectures de systèmes permettant d'éviter les erreurs.

1 – Modélisation markovienne

Présenter la méthode de modélisation markovienne, ses avantages et limites et des règles à appliquer pour éviter les erreurs.

2 - Applications

Modéliser les architectures suivantes :

<p>a) Redondance froide 1 parmi 2 avec délai de commutation</p>	<p>b) Redondance froide 1 parmi 2 commuté par un switch</p>
<p>c) Ressources partagées (convertisseur d'alimentation)</p>  <p>The diagram shows three parallel paths. Each path starts with a component (a, b, or c) in an orange box. Below each of these is a component (a', b', or c') in a grey box labeled 'Froid'. The paths are interconnected, showing a shared resource structure.</p>	<p>d) Mécanisme en redondance 3 parmi 4</p>  <p>The diagram shows three parallel paths, each with an orange box (Elec1, Elec2, Elec3) and a pink box (Méca1, Méca2, Méca3). Below these are three grey boxes (Méca1', Méca2', Méca3') labeled 'Froid'. A 'Switch' connects these to a fourth orange box (Elec4) and a grey box (Elec4) labeled 'Froid'.</p>
<p>e) Système de communication</p>  <p>The diagram shows three parallel paths. Each path starts with an orange box (E, L, R) labeled 'Emetteur', 'Liaison', and 'Récepteur' respectively. Below each is a grey box (Eoff, Loff, Roff). The paths are interconnected, showing a communication system with redundancy.</p>	<p>f) Calculateurs en redondance</p>  <p>The diagram shows a 'Watch Dog' in an orange box connected to two 'Calculateur' boxes. One is orange and the other is grey and labeled 'Froid'.</p> <p>e : Efficacité de la surveillance</p>

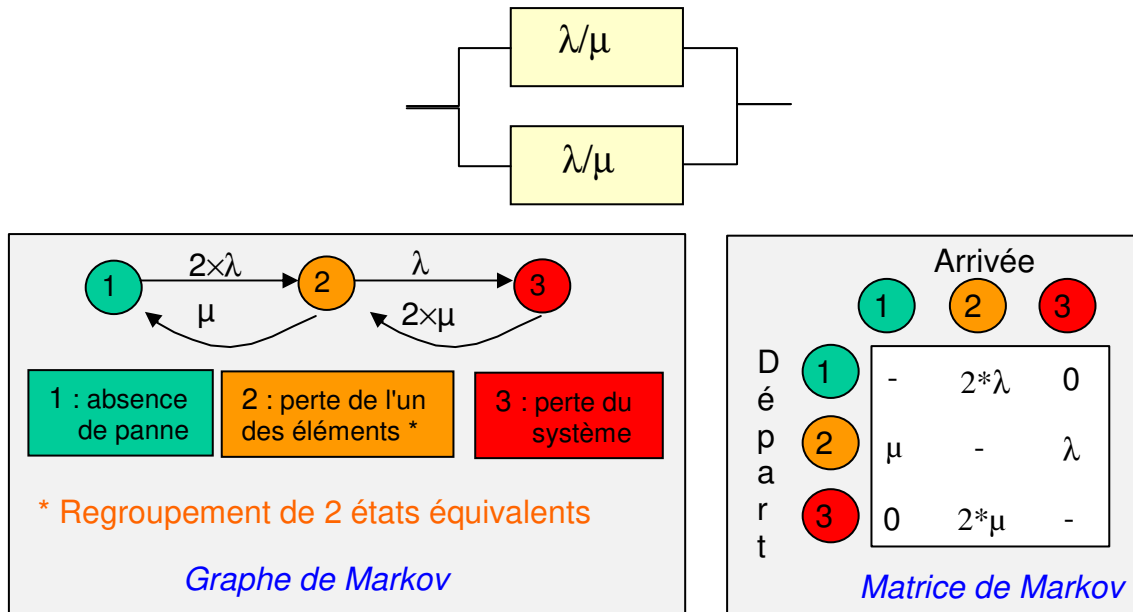
¹ Ce TP est directement issu de l'ouvrage « De la quantification du risque à l'optimisation des systèmes » publié dans la collection « La fiabilité en pratique » de Cab Innovation.

1) MODELISATION MARKOVIENNE

a) Principe

Un processus de Markov² est un processus aléatoire dont l'état futur ne dépend que de l'état présent (sans mémoire). Ce processus est dit homogène si la probabilité de transition d'un état vers un autre se modélise par une loi exponentielle et se caractérise donc par un taux constant λ_{ij} .

Le graphe de Markov permet de décrire le comportement dynamique d'un système dans des conditions d'exploitation données, comme l'illustre l'exemple ci-dessous qui porte sur deux équipements identiques en redondance active ayant chacun leur réparateur propre (de taux de défaillance λ et de réparation μ).



Dans le graphe de Markov, les divers états de fonctionnement sont représentés par des cercles et les transitions entre états par des arcs orientés, renseignés par les taux de transition correspondants.

Certains états équivalents peuvent être regroupés comme la perte de l'un ou de l'autre élément dans cet exemple.

Le taux de transition de l'état 1 à l'état 2 est alors égal à $2 \times \lambda$ et celui de l'état 3 à l'état 2 dépend des conditions d'exploitation du système, soit $2 \times \mu$ si chaque équipement a son propre réparateur ou μ si un réparateur unique est en charge de l'ensemble de la maintenance.

Le fonctionnement du système peut également se représenter directement par la matrice de Markov (les coefficients λ_{ij} correspondent alors aux taux de transition des états i en ligne vers les états j en colonne).

Cette représentation matricielle est plus synthétique que le graphe et limite les risques d'erreurs, notamment l'oubli de certaines transitions.

b) Avantages et limites

La modélisation markovienne permet de traiter des systèmes dynamiques et d'effectuer des calculs de probabilité rapides et précis, notamment par rapport à la simulation de Monte-Carlo.

² Andrei Markov a publié les premiers résultats sur les chaînes de Markov à espace d'états fini en 1906.

Elle souffre cependant de certaines limitations :

- l'absence de mémoire du passage dans les états passés (propre des systèmes markoviens),
- l'emploi exclusif de taux de transition constants (propre des systèmes homogènes),
- l'explosion combinatoire des états (2^n pour un système de n éléments à 2 états).

Afin de contrer l'explosion combinatoire, il est souvent possible de décomposer le système en sous-ensembles indépendants. Ces derniers peuvent alors faire chacun l'objet d'une modélisation markovienne et leur regroupement d'un traitement de type arbre de fautes.

N'entre alors dans les modèles markoviens que des ensembles d'éléments interdépendants.

c) Démarche de modélisation

La modélisation markovienne est délicate et exige de suivre une démarche rigoureuse pour éviter les erreurs.

- Les différents états du système sont d'abord identifiés et ordonnés, si possible, du moins au plus dégradé. Certains états équivalents peuvent être éventuellement regroupés.
- Il est fortement recommandé d'utiliser une matrice plutôt qu'un graphe pour ne pas oublier de transition entre les états.
- Les diverses transitions possibles sont alors recensées et les causes de celles-ci sont analysées afin de déterminer les taux de transition correspondants.
- Dans cette dernière étape, un contrôle simple consiste à vérifier la présence de tous les taux de défaillance des équipements opérationnels et de tous les taux de réparation des équipements en panne dans chacune des lignes de la matrice.

2) APPLICATIONS

A) Redondance froide 1 parmi 2 avec délai de commutation³

	1	2	3	4	5
Nominal actif - Redondant OFF : 1	-	$\lambda/10$	λ		
Nominal actif - Redondant en panne : 2	μ	-			λ
Nominal en panne - Redondant OFF : 3	μ		-	1 / délai	$\lambda/10$
Nominal en panne - Redondant actif : 4	μ			-	λ
Nominal en panne - Redondant en panne : 5		μ		μ	-

λ :	0,0001	hr ⁻¹
μ :	0,1	hr ⁻¹
délai :	4	hr
T :	10	hr

MAT :	1	2	3	4	5
1	-	0,00001	0,0001		
2	0,1	-			0,0001
3	0,1		-	0,25	0,00001
4	0,1			-	0,0001
5		0,1		0,1	-

INIT :	1	2	3	4	5
	1	0	0	0	0

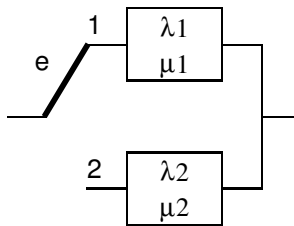
ETATS :	1	2	3	4	5
	1	1	0	1	0

Disponibilité à T : **0,99972295**

En régime stationnaire : **0,99971419**

³ Traitement réalisé par l'outil Supercab.

B) Redondance froide 1 parmi 2 commuté par un switch



OK switch sur 1 : 1
 OK switch sur 2 : 2
 Perte 1 : 3
 Perte 2 : 4
 Indisponible : 5

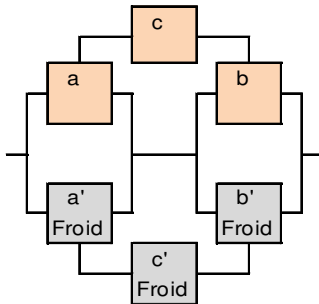
	1	2	3	4	5
1	-		$e \times \lambda_1$	λ_2^*	$(1-e) \times \lambda_1$
2		-	λ_1^*	$e \times \lambda_2$	$(1-e) \times \lambda_2$
3		μ_1	-		λ_2
4	μ_2			-	λ_1
5			μ_2	μ_1	-

e : efficacité à la sollicitation

λ^* : taux de panne à l'état off

Le switch n'est utilisé qu'en cas de besoin. Il n'est soumis qu'à des pannes à la sollicitation avec une probabilité d'occurrence égale à $1 - e$. Un bloc en série peut être éventuellement ajouté à ce modèle pour prendre en compte d'autres types de défaillance de celui-ci.

C) Ressources partagées

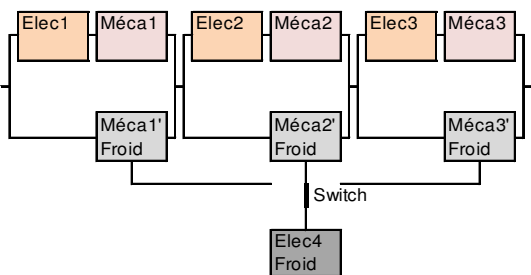


Absence de panne : 1
 Perte de a ou a' : 2
 Perte de b ou b' : 3
 Perte de a et b' ou a' et b : 4
 Perte de toutes redondances : 5
 Perte du système : 6

	1	2	3	4	5	6
1	-	$\lambda_a + \lambda_{aoff}$	$\lambda_b + \lambda_{boff}$		$\lambda_c + \lambda_{c off}$	
2		-		λ_b	$\lambda_{boff} + \lambda_{c off}$	$\lambda_a + \lambda_c$
3			-	λ_a	$\lambda_{a off} + \lambda_{c off}$	$\lambda_b + \lambda_c$
4				-		$\lambda_a + \lambda_b + 2\lambda_c$
5					-	$\lambda_a + \lambda_b + \lambda_c$
6						-

Les symétries des architectures sont exploitées pour regrouper les états équivalents.

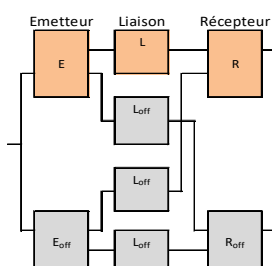
D) Mécanisme en redondance 3/4



Absence de panne : 1
 Perte d'une Méca off : 2
 Perte de 2 Méca off : 2
 Perte de toutes redondances : 4
 Perte du système : 5

	1	2	3	4	5
1	-	$3\lambda_{Moff}$		$3(\lambda_E + \lambda_M) + \lambda_{Eoff}$	
2		-	$2\lambda_{Moff}$	$2(\lambda_E + \lambda_M) + \lambda_{Eoff}$	$\lambda_E + \lambda_M$
3			-	$\lambda_E + \lambda_M + \lambda_{Moff} + \lambda_{Eoff}$	$2(\lambda_E + \lambda_M)$
4				-	$3(\lambda_E + \lambda_M)$
5					-

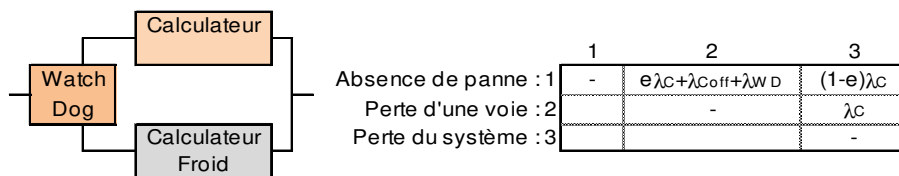
E) Système de communication



Pas de panne : 1
 Perte 1 liaison : 2
 Perte 2 liaisons : 3
 Perte 1 émetteur (ou liaisons) : 4
 Perte 1 récepteur (ou liaisons) : 5
 Perte de toute redondance : 6
 Perte du système : 7

MAT :	1	2	3	4	5	6	7
1	-	$\lambda_L + 3\lambda_{Loff}$		$\lambda_E + \lambda_{Eoff}$	$\lambda_R + \lambda_{Roff}$		
2		-	$\lambda_L + 2\lambda_{Loff}$	$\lambda_E + \lambda_{Eoff} + \lambda_{Loff}$	$\lambda_R + \lambda_{Roff} + \lambda_{Loff}$		
3			-			$\lambda_E + \lambda_{Eoff} + \lambda_R + \lambda_{Roff} + \lambda_L + \lambda_{Loff}$	
4				-		$\lambda_R + \lambda_{Roff} + \lambda_L + \lambda_{Loff}$	λ_E
5					-	$\lambda_E + \lambda_{Eoff} + \lambda_L + \lambda_{Loff}$	λ_R
6						-	$\lambda_E + \lambda_R + \lambda_L$
7							-

F) Calculateurs en redondance



	1	2	3
Absence de panne : 1	-	$e\lambda_C + \lambda_{\text{conf}} + \lambda_{\text{WD}}$	$(1-e)\lambda_C$
Perte d'une voie : 2		-	λ_C
Perte du système : 3			-

e : Efficacité de la surveillance