TP N° 69

Disponibilité opérationnelle évaluée au moyen de formules analytiques

L'objet de ce TP est de montrer comment évaluer grossièrement la disponibilité opérationnelle d'un système de manière conservative au moyen de formules analytiques.

Ce TP est directement issu de l'ouvrage « De la quantification du risque à l'optimisation des systèmes » publié dans la collection « La fiabilité en pratique ». Il est disponible au format Word avec les fichiers Excel incrustés sur le site : cabinnovation.com/shop.

1 – Disponibilité d'un équipement à taux de panne et de réparation constants

Exprimer la disponibilité au cours du temps d'un équipement à taux de panne et de réparation constants.

2 – Stock de rechanges

Exprimer la probabilité de rupture d'un stock de rechange en utilisant la loi de Poisson.

3 – Disponibilité d'un équipement avec stock de rechanges

Exprimer la disponibilité opérationnelle d'un équipement avec stock de rechange.

4 – Disponibilité d'un système complexe avec stock de rechanges partagé

Exprimer la disponibilité d'un système complexe ayant un stock de rechange partagé. Comparer les résultats avec ceux obtenus par simulation.

5 – Disponibilité d'un système dont les constituants sont utilisés selon une chronologie

Exprimer la disponibilité d'un service assuré par des constituants d'un système qui ne sont pas utilisés simultanément mais selon une certaine chronologie.

CAB INNOVATION
3 rue de la coquille, 31500 Toulouse – Tel : 05 61 54 68 08
Courriel : contact@cabinnovation.com
Site : cabinnovation.com

1 - Disponibilité d'un équipement à taux de panne et de réparation constants

La disponibilité à t + dt peut s'exprimer de la manière suivante en considérant que l'équipement est disponible à t et ne tombe pas en panne entre t et t +dt ou qu'il est indisponible à t mais est réparé entre t et t + dt.

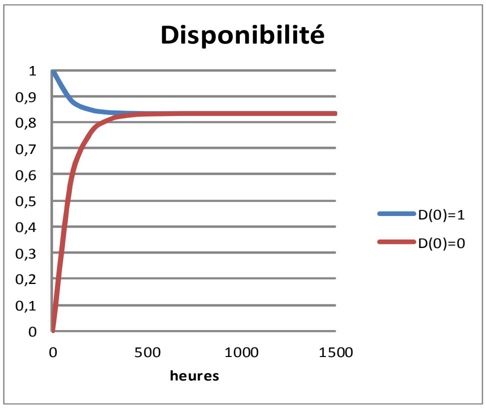
$$D(t+dt) = D(t)(1-\lambda dt) + (1-D(t))\mu dt$$

On en déduit l'expression de la dérivée de la disponibilité

$$\frac{D(t+dt)-D(t)}{dt} = \frac{dD}{dt}(t) = \mu - (\lambda+\mu)D(t)$$

Ainsi que deux solutions de l'équation différentielle du premier ordre selon que l'équipement est initialement disponible ou non.

$D(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$ si D(0) = 1 $\qquad$ $D(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right)$ si D(0) = 0



λ :	0,002	hr^{-1}
μ :	0,01	hr
D(∞) = μ/(λ+μ) :	0,83333333	

On retrouve l'expression de la disponibilité asymptotique :
D(∞) = μ/(λ+μ) = [1/MDT]/[(1/MUT]+[1/MUT]) = MUT/(MUT + MDT)

La disponibilité moyenne entre o et t peut également se calculer en intégrant l'expression de la disponibilité instantanée.

$$D_{moy}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t D(\tau) = \frac{1}{t}\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}\tau - \frac{\lambda}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t}\right]_0^t = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{t(\lambda+\mu)^2}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \quad \text{si } D(0) = 1$$

2 – Probabilité de de rupture d'un stock de rechange

La probabilité de rupture d'un stock de rechange peut se calculer au moyen la loi de Poisson en considérant que la rupture a lieu si le nombre de défaillances pendant la durée de réapprovisionnement (TAT : Turn Around Time) est supérieur à la dimension du stock de rechange (s).

$$\boxed{P = 1 - \sum_{k=0}^{s} e^{-\lambda TAT} \frac{(\lambda TAT)^k}{k!}}$$

Si n composants d'un même type sont utilisés simultanément cette probabilité de rupture devient :

$$\boxed{P = 1 - \sum_{k=0}^{s} e^{-n\lambda TAT} \frac{(n\lambda TAT)^k}{k!}}$$

Si un équipement est composé de N types de composants différents, la probabilité de rupture du stock devient :

$$\boxed{P = 1 - \prod_{i=1}^{N} \sum_{k=0}^{s_i} e^{-n_i\lambda_i TAT_i} \frac{(n_i\lambda_i TAT_i)^{k_i}}{k_i!}}$$

Cette formule est utilisée dans l'exemple suivant qui cherche à minimiser le coût d'un stock de rechange (utilisé pour un certain nombre d'équipements) en limitant sa probabilité de rupture à une certaine valeur (optimisation réalisée au moyen de l'outil Gencab).

Optimisation d'un stock de rechange contrainte par une limitation du risque de rupture

Nb d'équipements : 20

Type	n	MTBF (hr)	TAT (hr)	s	1-p	C (K€)	Coût (K€)
1	2	300000	1000	2	0,99964241	10	20
2	3	1500000	5000	2	0,99885152	200	400
3	5	2500000	500	1	0,99980265	70	70
4	4	3000000	3000	1	0,99696565	50	50
5	5	5000000	200	1	0,99999202	30	30
6	3	50000	3000	10	0,99872871	30	300
7	7	300000	400	2	0,99905695	50	100
8	5	500000	3000	4	0,99960551	70	280
9	4	400000	2000	3	0,99922375	150	450
10	2	1200000	100	3	1	25	75
				P :	**0,81%**		**1775**
					≤		↘
				Niveau de risque :	**1%**		

Feuille de calcul Microsoft Excel

3 – Disponibilité opérationnelle d'un équipement avec un stock de rechange

La disponibilité asymptotique d'un équipement peut se calculer par l'expression suivante dans laquelle le MDT (Mean Down Time) est la durée moyenne d'indisponibilité avec rechange et p la probabilité de rupture du stock de rechange :

$$\boxed{D = \frac{MTBF}{MTBF + MDT + p * TAT}}$$

L'estimation correspondante est conservative car la durée d'approvisionnement TAT est considérée en totalité, en cas de rupture du stock de rechange, sans tenir compte des demandes d'approvisionnement lancées préalablement.

Quand n composants d'un même type sont utilisés simultanément et que le MDT n'est pas affecté par le nombre de défaillances (n réparateurs), la disponibilité devient :

$$\boxed{D = \frac{MTBF/n}{MTBF/n + MDT + p*TAT}}$$

Dans le cas contraire, le MDT peut être pondéré par le nombre moyen de composants défectueux si chacun avait son réparateur, soit :

$$\boxed{D = \frac{MTBF/n}{MTBF/n + n_d MDT + p*TAT}} \text{ avec } \boxed{n_d = n\frac{MTBF + MDT}{MTBF}}$$

Cette formule (sans pondération) est utilisée dans l'exemple suivant qui cherche à minimiser le coût d'un stock de rechange en garantissant la disponibilité opérationnelle d'une certaine proportion d'équipements.

Optimisation d'un stock de rechange contrainte par une exigence de disponibilité opérationnelle

Nombre d'équipements : **100**

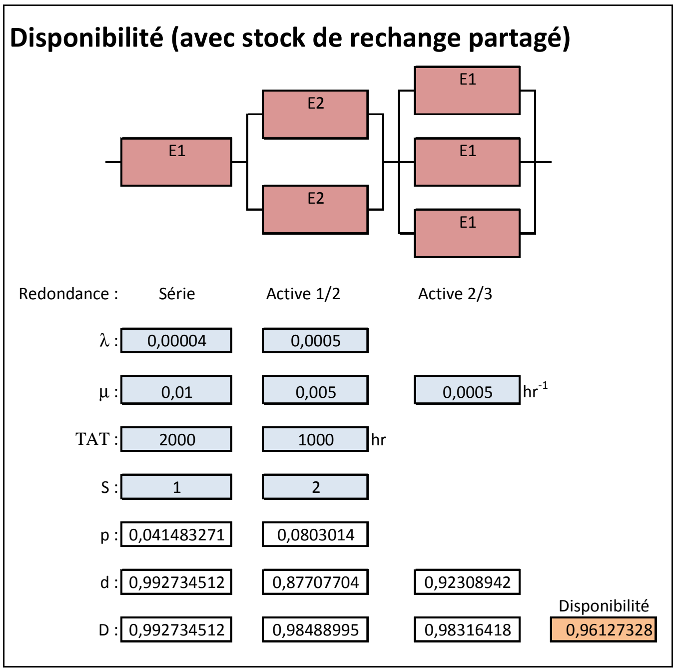
Type	n	MTBF (hr)	MDT(hr)	TAT (hr)	s	1-p	Disponibilité	C (K€)	Coût (K€)
1	2	300000	20	1000	2	0,96978789	0,99966536	10	20
2	3	1500000	50	5000	1	0,73575888	0,99726509	200	200
3	5	2500000	100	500	1	0,99532116	0,99979536	70	70
4	4	3000000	25	3000	1	0,93844806	0,99972054	50	50
5	5	5000000	25	600	2	0,99996558	0,99997498	30	60
6	3	50000	40	1000	9	0,91607598	0,99261944	60	540
7	7	300000	30	400	1	0,76026539	0,99707108	50	50
8	5	500000	10	3000	5	0,91608206	0,9973893	70	350
9	4	400000	150	2000	1	0,40600585	0,98679677	150	150
10	2	1200000	300	500	2	0,99990938	0,99950017	25	50
						Disponibilité opérationnelle :	**97,01%**		**1540**
							≥		↘
						Objectif :	**97%**		

Feuille de calcul Microsoft Excel

4 – Disponibilité opérationnelle d'un système

La disponibilité opérationnelle de systèmes relativement complexes peut être évaluée de manière conservative au moyen des formules analytiques précédemment décrites.

Ainsi, la complexité de l'architecture traitée ci-après vient de la présence d'un stock partagé : le même type d'équipement étant utilisé dans les blocs série et active 2/3.



Feuille de calcul
Microsoft Excel

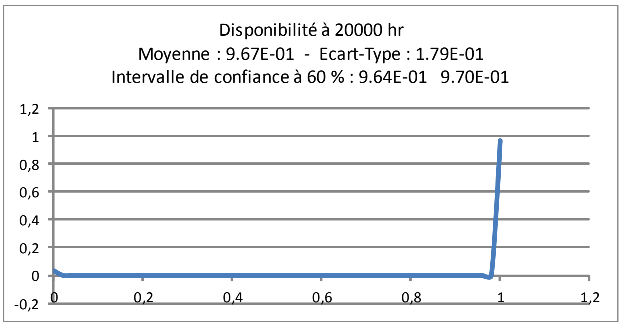
Cette même architecture a été évaluée ci-dessous au moyen de l'outil de simulation SIMCAB. La disponibilité opérationnelle est alors légèrement meilleure conformément au résultat attendu.

Architecture Passif Simulateur Rechange BDF

Equipement		Panne		Réparation		Markov	Stock rechange					
									TAT			
N°	Nom	Loi	λ	Loi	μ		N°	S	Loi	Paramètres		
1	Equipement 1	EXP	4E-05	EXP	0,01	VRAI	1	1	EXP	5E-04		
2	Equipement 2	EXP	0,0005	EXP	0,005	VRAI	2	2	EXP	0,001		
3	Equipement 2	EXP	0,0005	EXP	0,005	VRAI	2		EXP			
4	Equipement 1	EXP	4E-05	EXP	0,0005	VRAI	1		EXP			
5	Equipement 1	EXP	4E-05	EXP	0,0005	VRAI	1		EXP			
6	Equipement 1	EXP	4E-05	EXP	0,0005	VRAI	1		EXP			
7		EXP		EXP		VRAI			EXP			
+												

Fonctionnement		
N°	Nom	Condition
1	Série	E1
2	Active 1/2	E2+E3
3	Active 2/3	2/3(E4+E5+E6)
4	Disponibilité	F1*F2*F3
+		

	T0	Ti	TTF	TTR	Tj	DeltaT
	0	20000			20000	0
Equipements						
E1 :	1	1	68656,21		1	Initialisation
E2 :	1	1	10956,23		1	
E3 :	1	1	1315,01		1	Pas_à_pas
E4 :	1	1	11099,81		1	
E5 :	1	1	9175,79		1	Simulation
E6 :	1	1	1797,09		1	
Stocks				TAT		
S1 :	1	1			1	
S2 :	2	2			2	
Fonctions						
F1 :		1			1	
F2 :		1			1	
F3 :		1			1	
F4 :		1			1	
Moyenne/mission						
F1 :		0,9863			0,9863	
F2 :		0,9991			0,9991	
F3 :		0,9467			0,9467	
F4 :		0,9321			0,9321	



Feuille de calcul
Microsoft Excel

5 – Chronologie

La disponibilité d'un système dont les constituants ne sont pas utilisés simultanément mais selon une chronologie (un système spatial dont le service commence avec la requête d'un utilisateur et s'achève avec la remise d'un produit tel qu'une image de la Terre, par exemple) peut s'évaluer au moyen d'un simulateur comportemental mais aussi plus simplement de manière conservative en considérant que toutes les ressources nécessaires sont disponibles durant toute la chronologie.

La disponibilité du service se calcule alors de la manière suivante :

$$D = \prod_{1}^{n} D_i * R_i(T_{Chronologie})$$

Avec n le nombre de ressources utilisées, D_i la disponibilité asymptotique de chacune d'elles et R_i leur fiabilité pendant la durée de la chronologie.

Conclusion

La disponibilité opérationnelle d'un système peut être évaluée au moyen d'un modèle comportemental plus ou moins sophistiqué par simulation de Monte-Carlo ou traitement markovien.

Mais elle peut être souvent appréhendée grossièrement, de manière conservative, au moyen de simples formules analytiques.