

TP N° 77

Modèles de dégradation

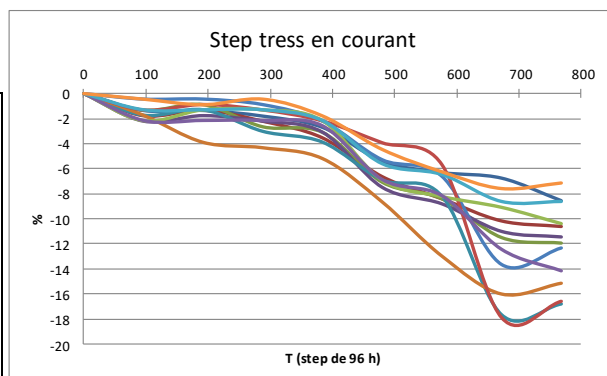
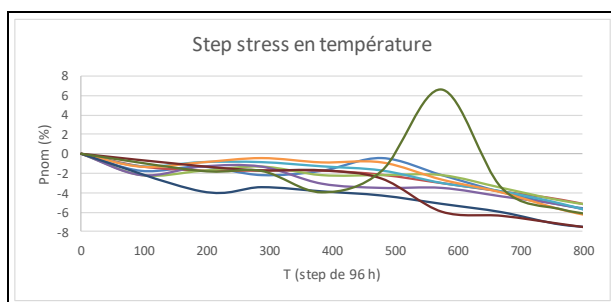
L'objet de ce TP est d'analyser les caractéristiques des modèles susceptibles de représenter les processus de dégradation tels que l'usure d'un mécanisme ou une propagation de fissure.

Ce TP reprend des éléments traités dans les ouvrages « Mise en œuvre des essais accélérés » et « La fiabilité en pratique » de la collection « La fiabilité en pratique ».

Il est disponible au format Word avec les fichiers de calculs Excel incrustés dans la boutique en ligne de Cab Innovation.

1 – Présenter les caractéristiques de différents modèles de dégradation (Wiener, Gamma, Variance Gamma, Poisson composé)

2 – A partir des résultats d'essais accélérés suivants, estimer la fiabilité et la durée de vie restante (RUL) d'un composant dont le domaine de dégradation acceptable est limité à 10%.



1 – Modèles de dégradation

Les phénomènes de dégradation, tels que l'usure d'un mécanisme ou une propagation de fissure, peuvent être modélisés par des processus de Lévy¹.

Ces processus stochastiques à accroissements indépendants stationnaires (qui ne dépendent que de l'intervalle de temps) peuvent être rendus stationnaires, pour pouvoir faire varier la vitesse de dégradation au cours du temps, ou accélérés, afin de tenir compte du stress généré par des conditions d'utilisation et d'environnement, comme l'illustre la figure 1.

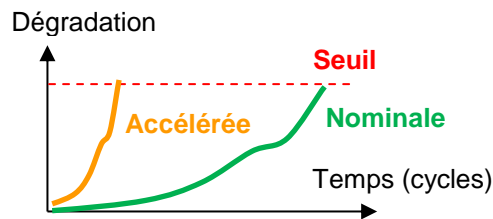


Figure 1 – Dégradation non stationnaire accéléré

Mais quel processus de Lévy choisir ?

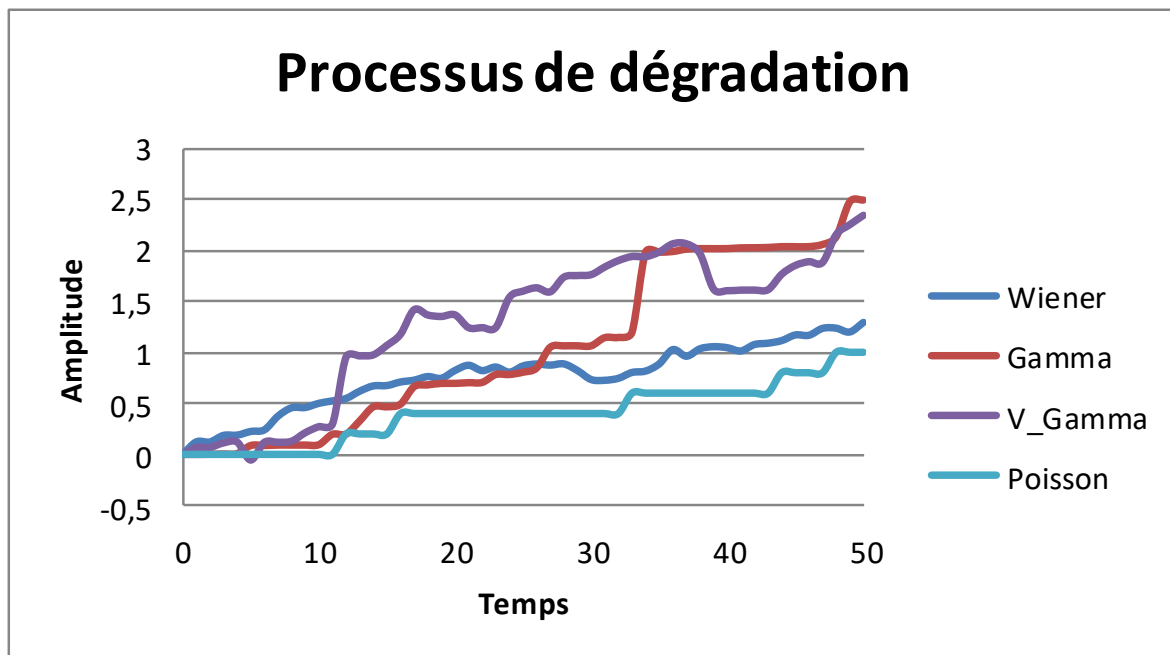


Figure 2 – Processus de dégradation

Tout dépend des types de comportement comme l'illustre la figure 2. La dégradation peut croître de manière monotone (Gamma) ou présenter des rémissions passagères (Wiener et Variance Gamma), évoluer de manière continue et bruitée (Wiener) ou discontinue (Gamma et Variance Gamma), ou n'augmenter qu'à différents instants (Poisson composé).

¹ Paul Lévy mathématicien français.

1.1 - Processus de Wiener

Un processus de Wiener a la forme suivante :

$$Z(t) = \mu t + \sigma W(t) \quad \text{avec } \mu \text{ la dérive et } \sigma \text{ la volatilité}$$

$W(t)$ est une variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance t qui correspond au mouvement brownien standard utilisé pour décrire le mouvement aléatoire d'une particule immergée dans un fluide.

La dégradation entre deux instants est modélisée par une variable aléatoire normale de moyenne $\mu \Delta t$ et d'écart type $\sigma \sqrt{\Delta t}$:

$$Z(t + \Delta t) - Z(t) = N(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$$

La dégradation présente des rémissions passagères quand la variable est négative. Sa forme générale, continue et bruitée, résulte d'incrémentes constitués chacun d'une dérive et d'un bruit gaussien.

1.2 - Processus de Gamma

Un processus gamma est caractérisé par des accroissements positifs distribués selon une loi gamma :

$$Z(t) = \Gamma(\alpha t, \beta)$$

La dégradation entre deux instants est modélisée de la manière suivante :

$$Z(t + \Delta t) - Z(t) = \Gamma(\alpha \Delta t, \beta)$$

Elle croît de manière monotone et discontinue.

1.3 - Processus à variance Gamma

Le processus à variance Gamma² a été introduit en analyse financière pour décrire une évolution non monotone et discontinue.

Il peut se présenter sous deux formes :

- Un processus de Wiener dont le temps est sujet à des sauts aléatoires régis par un processus gamma $\Gamma(t, \beta)$

$$Z(t) = \mu \Gamma(t, \beta) + \sigma W(\Gamma(t, \beta))$$

- Une différence entre deux processus gamma indépendants :

² D. Madan and E. Seneta, "The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns", The Journal of Business, vol. 63, no. 4, p. 511, 1990.

D. B. Madan and F. Milne, "Option Pricing With V. G. Martingale Components," Mathematical Finance, vol. 1, no. 4, pp. 39–55, 1991.

D. B. Madan, P. P. Carr, and E. C. Chang, "The Variance Gamma Process and Option Pricing," Review of Finance, vol.2, no. 1, pp. 79–105, Jan. 1998.

$$Z(t) = \Gamma(\alpha_1 t, \beta_1) - \Gamma(\alpha_2 t, \beta_2)$$

$$\text{avec } \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 + \frac{2\sigma^2}{\beta}} + \frac{\mu}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\mu^2 + \frac{2\sigma^2}{\beta}} - \frac{\mu}{2} \text{ si } \beta_1 = \beta_2 = \beta$$

La figure 3 présente des trajectoires de dégradation simulées à partir de ces deux formes de processus Variance Gamma.

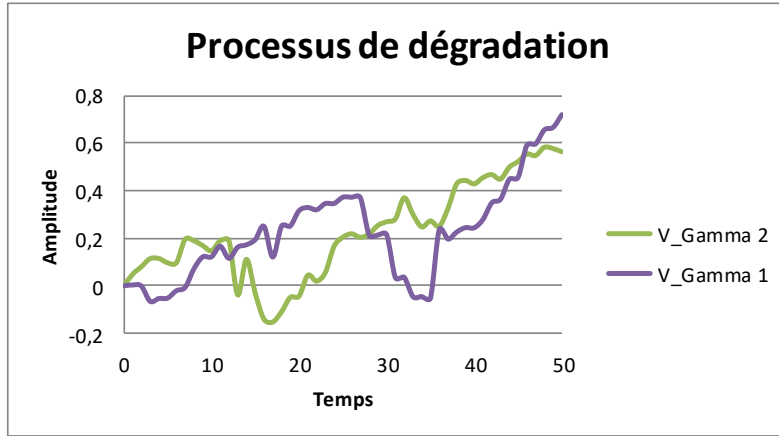


Figure 3 – Processus Variance Gamma

1.4 - Processus Poisson composé

Un processus de Poisson composé (ou marqué) est caractérisé par des accroissements positifs survenant à des dates aléatoires distribuées selon une loi de Poisson.

La trajectoire de dégradation résulte, par exemple, d'une accumulation de chocs sans modification du niveau de dégradation entre deux chocs. L'accroissement de dégradation consécutif à un choc peut être constant ou dépendre de la position de celui-ci dans la liste des chocs successifs.

1.5 – Simulation des processus de Levy

Les différents processus de Levy sont simulés sous Excel à la figure 4.

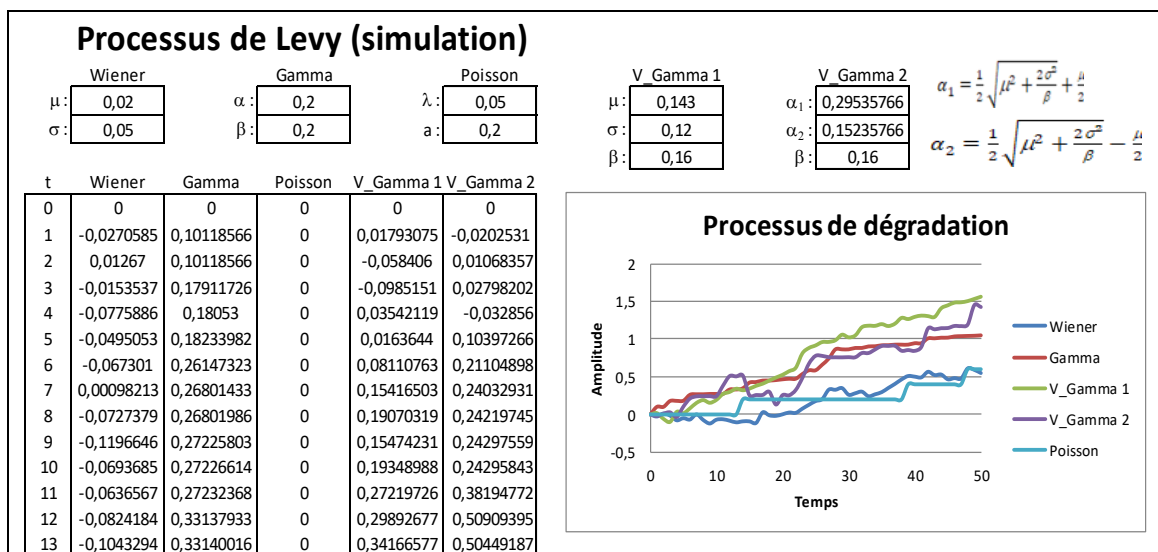


Figure 4 – Processus de Levy

2 – Processus de dégradation accéléré non stationnaire

Les processus de Lévy peuvent être rendus non stationnaires, au moyen d'une fonction $m(t)$ telle que la fonction puissance représentée à la figure 5, et accélérés par un facteur d'accélération FA, tel que celui d'Arrhenius pour la température.

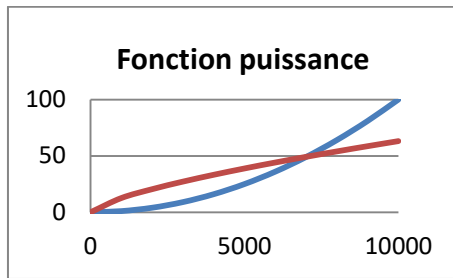


Figure 5 : Fonction $p t^q$ avec p et $q > 0$

A titre d'exemple, l'accroissement d'un processus Variance Gamma non stationnaire accéléré peut être modélisé de la manière suivante :

$$Z(t+\Delta t) - Z(t) = \Gamma(p_1 (FA(t+\Delta t))^q - p_1 (FA t)^q, \beta) - \Gamma(p_2 (FA(t+\Delta t))^q - p_2 (FA t)^q, \beta)$$

3 – Application

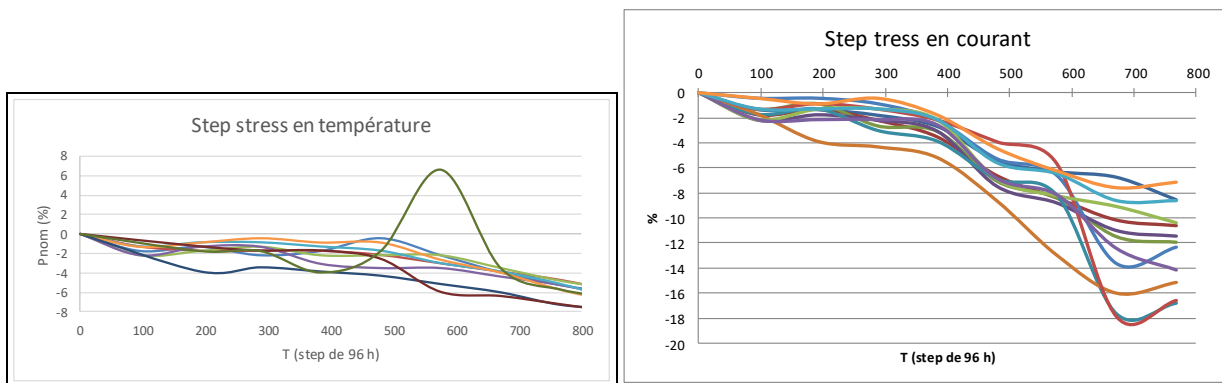


Figure 6 : trajectoires de dégradation

Les trajectoires de dégradation représentées à la figure 6 n'étant pas monotones, seuls des processus de Wiener ou de Variance Gamma non stationnaires accélérés peuvent être utilisés pour modéliser le phénomène d'usure.

A partir des résultats d'essais accélérés en température et en courant, un processus de Wiener a fait l'objet d'un ajustement au moyen de l'outil Gencab (figure 7) puis d'une simulation de Monte-Carlo afin d'estimer la courbe de fiabilité et le potentiel restant dans un domaine de dégradation acceptable, au moyen de l'outil Simcab (figure 8).

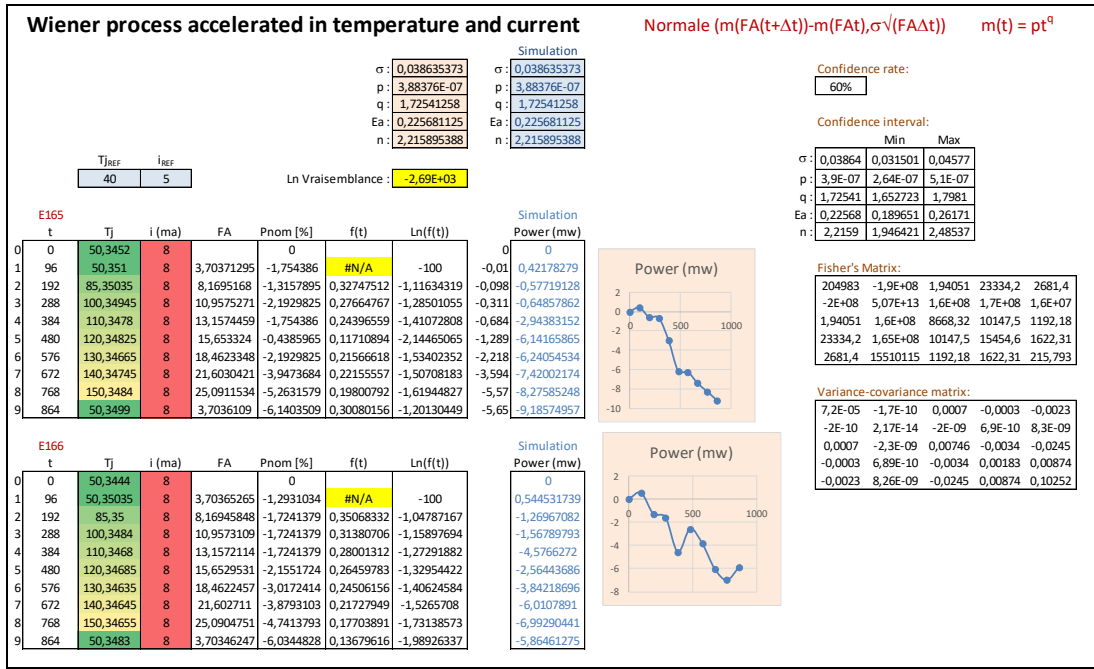


Figure 7 : trajectoires de dégradation

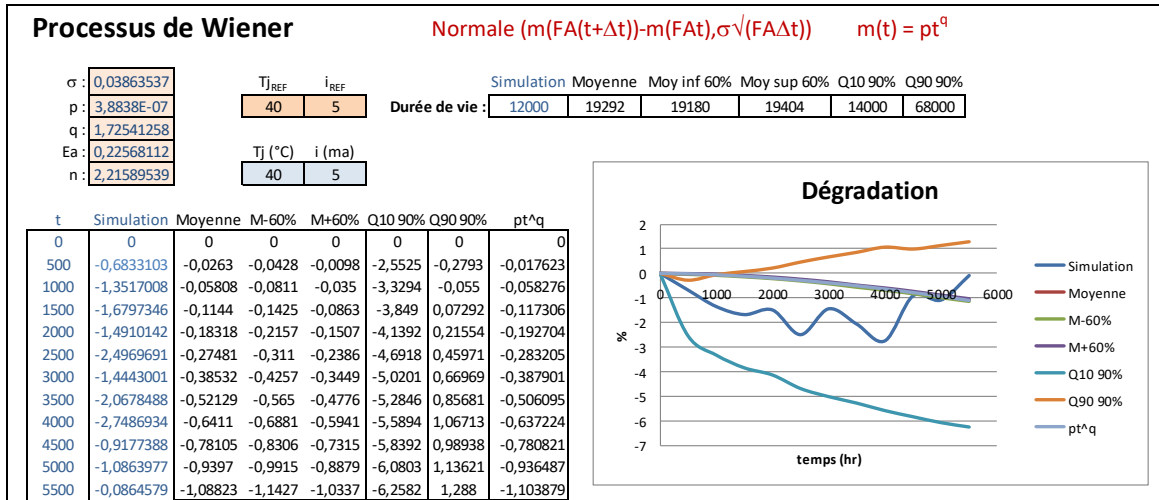


Figure 8 : trajectoires de dégradation



4 – Conclusion

La fiabilité et la durée de vie restante (RUL) d'un composant soumis à usure peuvent être estimées à partir de l'observation des dégradations dans des conditions d'utilisation et d'environnement variées.

Cette observation des trajectoires de dégradation est statistiquement beaucoup plus riche que celle des instants de défaillance et peut donc s'opérer sur moins de composants d'un même type.

Ces estimations requièrent l'emploi d'un modèle de dégradation adapté à l'évolution du phénomène d'usure dans la durée.

Avec 3 ou 4 paramètres, le processus à Variance Gamma se révèle particulièrement souple pour décrire la diversité des phénomènes. Mais son ajustement n'est pas simple car sa fonction de vraisemblance présente de nombreux optima locaux avec une fonction de Bessel dans son expression.

Des méthodes d'optimisation hybride semblent plus adaptées pour cet ajustement que les techniques locales actuellement employées.

Nous chercherons à le démontrer dans un prochain TP.