



TP N° 78

Processus Variance Gamma

L'objet de ce TP est d'analyser les caractéristiques du processus Variance Gamma qui semble bien adapté à la maintenance prédictive pour modélisation des phénomènes de dégradation tels que l'usure d'un mécanisme ou une propagation de fissure.

Ce TP est disponible au format Word, avec les fichiers de calculs Excel incrustés, dans la boutique en ligne de Cab Innovation.

De même, la macro-fonction « LOI.VARIANCE.GAMMA() » utilisée dans ce TP y est proposée ainsi que le logiciel Gencab dans sa version basic qui est suffisante pour le traiter.

Ce TP reprend des éléments des ouvrages « Mise en œuvre des essais accélérés » et « La fiabilité en pratique » de la collection « La fiabilité en pratique ».

1 – Présenter les caractéristiques du processus Variance Gamma.

2 – Réaliser l'ajustement d'un processus Variance Gamma stationnaire, non stationnaire et non stationnaire accéléré, à partir de trajectoires de dégradation simulées.

I - Processus Variance Gamma

Introduit en analyse financière à la fin du siècle dernier, le processus Variance Gamma¹ permet de décrire une évolution non monotone discontinue, comme le montre la figure 1. Ce modèle à 3 paramètres est plus flexible que d'autres processus de Levy tels que les processus Gamma (monotone), de Wiener (dérive associée à un bruit gaussien) ou de Poisson composé (accroissements positifs distribués selon une loi de Poisson).

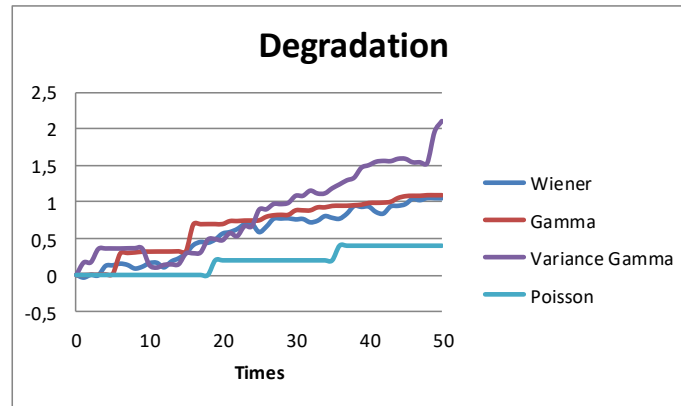


Figure 1 : Processus de Levy

Les processus de Levy sont caractérisés par des accroissements stochastiques indépendants qui ne dépendent que de la longueur de l'intervalle de temps (processus stationnaires).

I.1 - Processus de Wiener

Un processus de Wiener est un mouvement brownien avec dérive qui s'exprime de la manière suivante :

$$b(t, \theta, \sigma) = \theta t + \sigma W(t)$$

avec θ la dérive, σ la volatilité et $W(t)$ la variable aléatoire normale de moyenne nulle et de variance t (correspond au mouvement brownien standard utilisé pour décrire le mouvement aléatoire d'une particule immergée dans un fluide). Son évolution entre deux instants t et $t + h$ est modélisée par une loi normale de moyenne θh et d'écart type $\sigma\sqrt{h}$. Sa fonction de densité de probabilité a pour expression :

$$f_{b(h)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi h}} e^{-\frac{(x-\theta h)^2}{2\sigma^2 h}}$$

¹ D. Madan and E. Seneta, *The Variance Gamma (V.G.) Model for Share Market Returns*, The Journal of Business, vol. 63, no. 4, p. 511, 1990.

D. B. Madan and F. Milne, *Option Pricing With V. G. Martingale Components*, Mathematical Finance, vol. 1, no. 4, pp. 39–55, 1991.

D. B. Madan, P. P. Carr, and E. C. Chang, *The Variance Gamma Process and Option Pricing*, Review of Finance, vol.2, no. 1, pp. 79–105, Jan. 1998.

1.2 - Processus Gamma

Un processus gamma $\gamma(t, \mu, \nu)$ est caractérisé par des incréments positifs distribués selon une loi gamma d'espérance μh et de variance νh .

Son évolution entre deux instants t et $t + h$ est modélisée par une loi gamma de paramètres αh et β ou $\mu^2/\nu h$ et μ/ν (une loi gamma de paramètres α et β ayant pour moyenne $\mu = \alpha\beta$ et pour variance $\nu = \alpha\beta^2$).

Sa densité de probabilité a pour expression ($g > 0$) :

$$f_{\gamma(h)}(g) = \frac{g^{\alpha h - 1} e^{-\frac{g}{\beta}}}{\beta^{\alpha h} \Gamma(\alpha h)} \quad \text{ou} \quad f_{\gamma(h)}(g) = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 h}{\nu}} \frac{g^{\left(\frac{\mu^2 h}{\nu} - 1\right)} e^{-\left(\frac{\mu}{\nu} g\right)}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 h}{\nu}\right)} \quad \text{avec } \Gamma(x) \text{ la fonction gamma.}$$

1.3 - Processus Variance Gamma

Le processus Variance Gamma correspond à mouvement brownien avec dérive soumis à des changements de temps aléatoires, selon un processus gamma de type $\gamma(t, \mu = 1, \nu)$:

$$X(t, \nu, \theta, \sigma) = b(\gamma(t, 1, \nu), \theta, \sigma)$$

Sa fonction de densité au temps t peut être exprimée en tant que fonction de densité normale conditionnée à la réalisation d'un temps g selon une distribution gamma d'espérance t et de variance νt :

$$f_{X_t}(X) = \int_0^\infty f_b(g)(x) \times f_{\gamma(t)}(g) dg$$

soit :

$$f_{X_t}(X) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}g} e^{-\frac{(x-g)^2}{2\sigma^2g}} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{\mu^2 t}{\nu}} \frac{g^{\left(\frac{\mu^2 t}{\nu} - 1\right)} e^{-\left(\frac{\mu}{\nu} g\right)}}{\Gamma\left(\frac{\mu^2 t}{\nu}\right)} dg$$

ou

$$f_{X_t}(X) = \frac{2e^{\frac{\theta(x-\mu)}{\sigma^2}}}{\nu\sigma\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} \left(\frac{(x-\mu)^2}{\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2}\right)^{\frac{t}{2\nu} - \frac{1}{4}} K_{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sigma^2} \sqrt{(x-\mu)^2 \left(\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2\right)}\right)$$

avec $K_\alpha(x)$ la fonction de Bessel du deuxième type, $\Gamma(x)$ la fonction gamma et $\mu = 1$.

Le processus à variance Gamma se définit également comme une différence entre deux processus gamma indépendants :

$$X(t, \nu, \theta, \sigma) = \gamma(t, \mu_p, \nu_p) - \gamma(t, \mu_n, \nu_n)$$

$$\text{avec : } \mu_p = \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \frac{\theta}{2} \quad \mu_n = \frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \frac{\theta}{2}$$

$$\nu_p = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \frac{\theta}{2}\right)^2 \nu \quad \nu_n = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \frac{\theta}{2}\right)^2 \nu$$

Par ailleurs, les moments du processus Variance Gamma peuvent s'exprimer analytiquement :

$$\text{Espérance : } E[X(t)] = \theta t$$

$$\text{Variance : } E[(X(t) - E[X(t)])^2] = (\theta^2 v + \sigma^2) t$$

$$\text{Coefficient d'asymétrie} \times \text{Variance}^{3/2} : E[(X(t) - E[X(t)])^3] = (2 \theta^3 v^2 + 3 \sigma^2 \theta v) t$$

$$\text{Coefficient d'aplatissement (Kurtosis)} \times \text{Variance}^2 :$$

$$E[(X(t) - E[X(t)])^4] = (3 \sigma^4 v + 12 \sigma^2 \theta^2 v^2 + 6 \theta^4 v^3) t + (3 \sigma^4 + 6 \sigma^2 \theta^2 v + 3 \theta^4 v^2) t^2$$

1.4 - Processus de Levy non stationnaire accéléré

Un processus de Levy peut être rendu non stationnaire, au moyen d'une fonction telle que la fonction puissance et être accéléré pour tenir compte des stress générés par des conditions d'utilisation et d'environnement, comme l'illustre la figure 2.

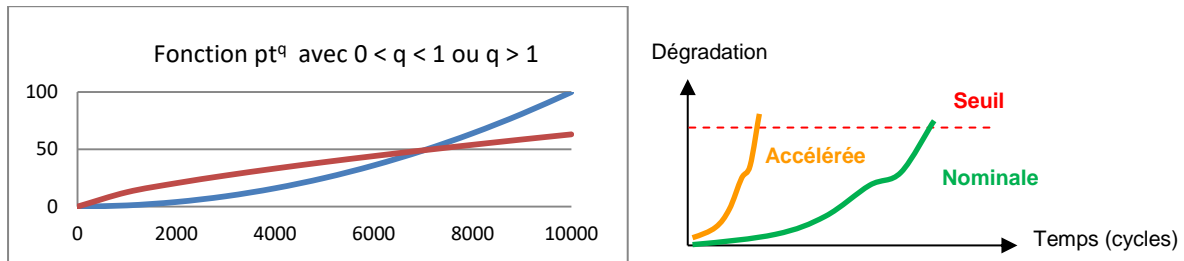


Figure 2 : Processus non stationnaire accéléré

L'évolution de la dégradation est alors calculée en remplaçant l'écart de temps h par h' :

$$h' = p(\text{Fa}(t+h))^q - p(\text{Fa}(t))^q$$

avec FA un facteur d'accélération de type SVA (Standard de Vie Accélérée).

Faisant l'hypothèse que seul le facteur d'échelle de la loi de fiabilité ou de dégradation est modifié et non sa forme, ces derniers regroupent la plupart des modèles d'accélération utilisés en fiabilité (Arrhenius, Basquin, etc.).

Si le niveau de stress varie, le principe de Sedyakin permet de déterminer un facteur d'accélération équivalent au profil de stress appliqué entre deux mesures.

$$\text{Fa}(S_{\text{Equivalent}}) = \frac{1}{t} \int_0^t \text{Fa}(S(u)) du$$

L'évolution de la dégradation entre deux instants est alors :

$$h' = p(\text{Fa}_e(t+h)(t+h))^q - p(\text{Fa}_e(t)t)^q$$

avec $\text{Fa}_e(t)$ et $\text{Fa}_e(t+h)$ les facteurs d'accélération équivalents de t_0 à t et t_0 à $t+h$.

1.5 – Calcul et simulation

La simulation de Monte-Carlo d'un processus Variance Gamma consiste à simuler la variable g par une loi gamma puis la variable x par une loi normale, soit sous Excel :

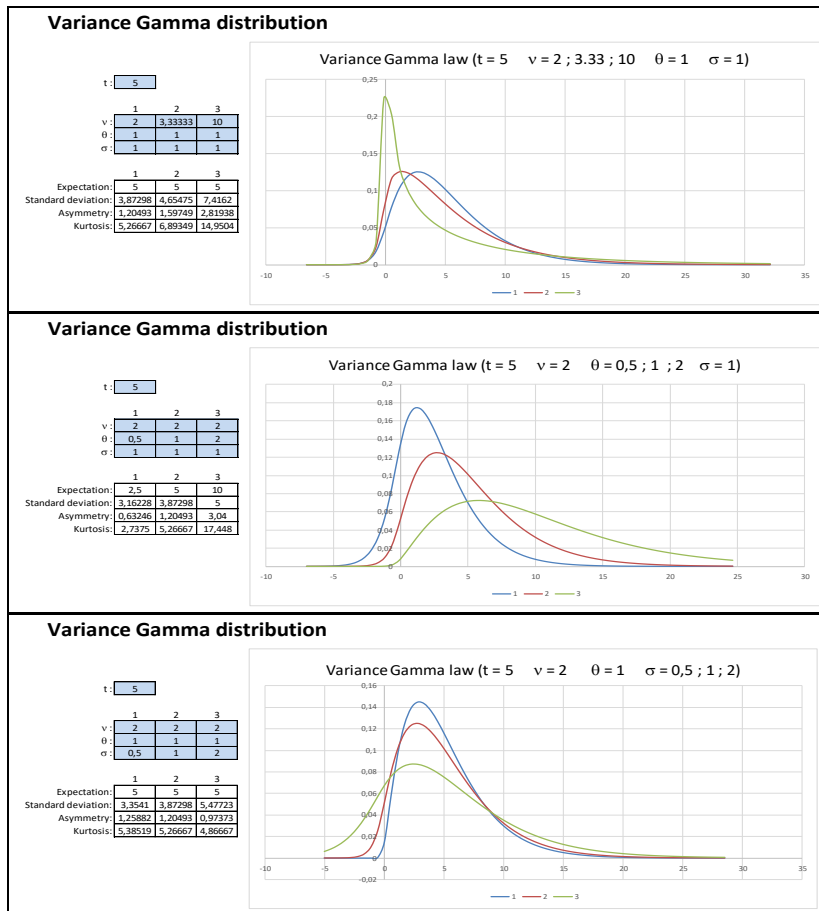
$$g = \text{LOI.GAMMA.INVERSE}(\text{ALEA}();t/\text{nu};\text{nu})$$

$$x = \text{LOI.NORMALE.INVERSE.N}(\text{ALEA}();\text{Téta}*g;\text{Sigma}*RACINE(g))$$

Le calcul de la densité de probabilité a fait l'objet du développement de la macro-fonction suivante qui sera intégrée à l'outil Gencab :

$$=\text{LOI.VARIANCE.GAMMA}(x; t; \text{Nu}; \text{Téta}; \text{Sigma}; \text{LNGAMMA}(t/\text{Nu}))$$

La figure 3 montre l'influence des paramètres de la loi Variance Gamma sur sa distribution.



 Variance Gamma paramètres

Figure 3 : Influence des paramètres

2 – Ajustement

La figure 4 montre l'ajustement d'un processus Variance Gamma à partir d'une trajectoire de dégradation simulée sur 200 pas de temps. Les paramètres utilisés pour la simulation sont à peu près retrouvés par l'ajustement.

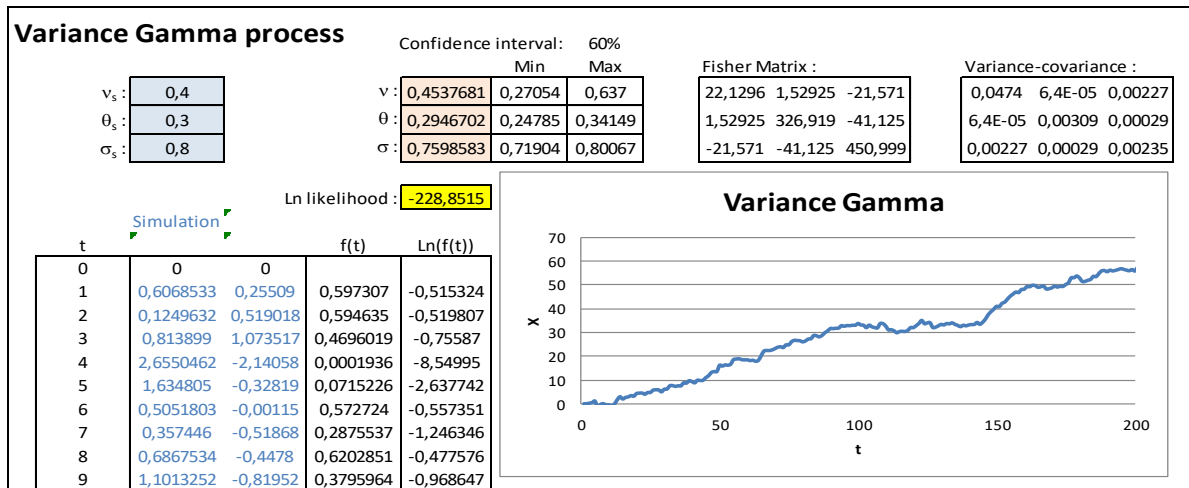


Figure 4 : Ajustement d'un processus Variance Gamma



V.G. stationnaire ajustement

La figure 5 montre l'ajustement d'un processus Variance Gamma non stationnaire à partir d'une trajectoire de 400 pas de dégradation élémentaires. Les paramètres utilisés pour la simulation sont à nouveau retrouvés par l'ajustement (q est le paramètre de la fonction puissance).

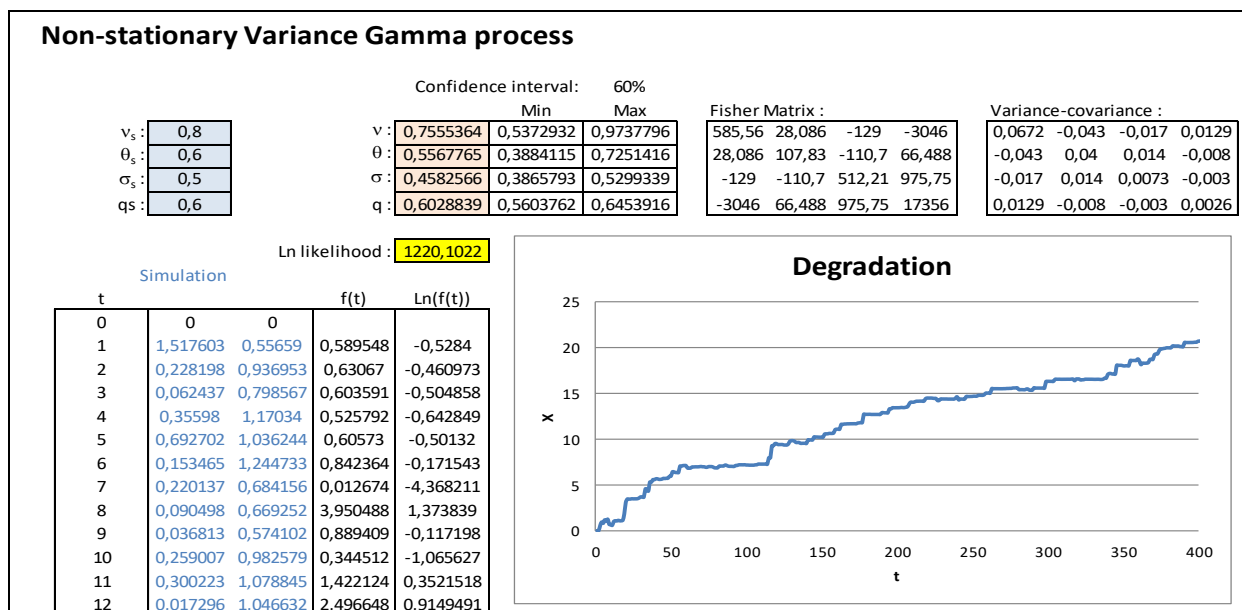


Figure 5 : Ajustement d'un processus Variance Gamma non stationnaire



VG non stationnaire ajustement

La figure 6 montre l'ajustement d'un processus Variance Gamma non stationnaire, accéléré en température à partir d'une trajectoire de 400 pas de dégradation élémentaires à différentes températures (Ea est l'énergie d'activation du modèle d'Arrhenius).

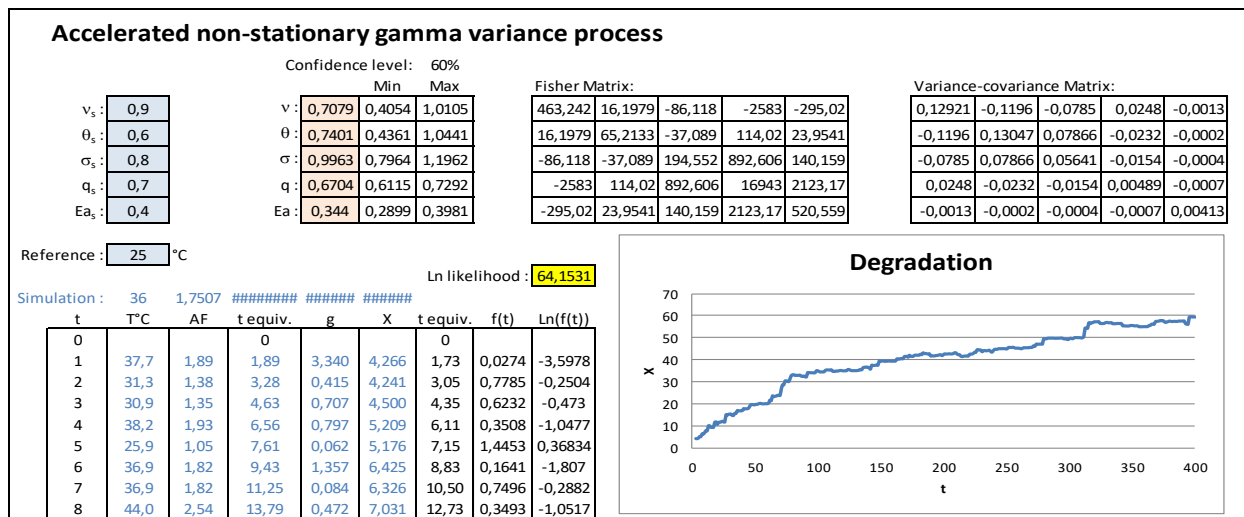


Figure 8 : Ajustement d'un processus Variance Gamma non stationnaire accéléré



V.G non stationnaire accéléré ajustement

A nouveau, les paramètres utilisés pour la simulation sont à peu près retrouvés par l'ajustement et sont presque tous à l'intérieur de l'intervalle de confiance à 60%.

Outre l'aspect aléatoire de la simulation, on notera l'importance de la précision du calcul de la densité de probabilité.

Par ailleurs, l'augmentation du nombre de paramètres d'un modèle impose un plus grand nombre de données observées pour pouvoir l'ajuster correctement.

3 – Conclusion

Bien que peu utilisé dans le domaine de la fiabilité, le processus Variance Gamma présente une plus grande flexibilité que les autres processus de Levy pour représenter la diversité des phénomènes de dégradation. Il s'avère, par là-même, pertinent pour élaborer un modèle prédictif quand un niveau d'usure est observable, directement ou indirectement.

Mais son ajustement n'est pas simple car sa fonction de vraisemblance doit être précise et homogène entre les observations (x, t) et peut présenter plusieurs optima. L'optimisation hybride (globale / locale) est alors plus adaptée que les méthodes locales généralement employées.

La comparaison entre divers traitements est aisée puisque le meilleur ajustement est celui qui donne la plus grande vraisemblance aux observations, comme le fait régulièrement l'outil Gencab quand la densité de probabilité, qui caractérise les modèles, est explicitée.

En ce qui concerne la qualité du modèle, celle-ci peut être mesurée par des indicateurs de biais (MAE) ou de variance (RMSE) des estimations par rapport à des observations non employées pour l'ajustement (20 % par exemple).

Une prochaine communication scientifique présentera l'apport du processus Variance Gamma dans le cadre d'une application industrielle : *Degradation modelling for predictive maintenance under various operating and environmental conditions*, colloque ESREL2021, 19-23/09/2021, Angers.